

Emanuelle Lima e Lima

**Simulação de Sistemas de Controle Aplicado a
Parte Superior do Corpo de Pessoas com Lesão
na Medula Espinhal**

Brasil

2025

Emanuelle Lima e Lima

Simulação de Sistemas de Controle Aplicado a Parte Superior do Corpo de Pessoas com Lesão na Medula Espinhal

Projeto de pesquisa desenvolvido durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II (TCC II) do curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Superior de Tecnologia.

Universidade do Estado do Amazonas – UEA

Escola Superior de Tecnologia – EST

Engenharia de Controle e Automação

Orientadora: Marlene Araujo de Faria

Brasil

2025

Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).
Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.

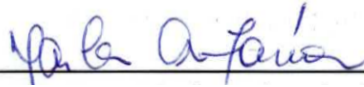
L732s	<p>Lima, Emanuelle Lima e Simulação de sistemas de controle aplicado a parte superior do corpo de pessoas com lesão na medula espinhal. / Emanuelle Lima e Lima. Manaus : [s.n], 2025. 47 f.: color.; 21.0 cm.</p> <p>TCC - Graduação em Engenharia de Controle e Automação- Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2025. Inclui Bibliografia. Orientador: Marlene Araujo de Faria.</p> <p>1. Lesão Medular. 2. Modelo H2AT. 3. Sistema Dinâmico. 4. Controle Postural. 5. Equilíbrio Postural. I. Marlene Araujo de Faria (Orient.) II. Universidade do Estado do Amazonas. III. Título</p> <p>CDU(1997)681.5</p>
-------	---

Emanuelle Lima e Lima


Simulação de Sistemas de Controle Aplicado a Parte Superior do Corpo de Pessoas com Lesão na Medula Espinhal

Projeto de pesquisa desenvolvido durante a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso II (TCC II) do curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Superior de Tecnologia.


Trabalho aprovado. Brasil, 09 de dezembro de 2025:



Prof^ª. Dra. Marlene Araujo de Faria
Universidade do Estado do Amazonas (UEA)
- Orientadora

 Documento assinado digitalmente
JOSE RUBEN SICCHAR VILCHEZ
Data: 12/03/2025 17:23:20-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. José Ruben Sicchar Vilchez
Universidade do Estado do Amazonas (UEA)

 Documento assinado digitalmente
WALTER ANDRES VERMEHREN VALENZUELA
Data: 15/12/2025 08:46:46-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Walter Andres Vermehren
Valenzuela**
Universidade do Estado do Amazonas (UEA)



**Prof. Dr. Miguel Angel Orellana
Postigo**
Universidade do Estado do Amazonas (UEA)

Brasil
2025

Ao ao meu pai Manoel, que me permitiu a realização de um sonho, mas que o acompanha como meu anjo protetor; à minha mãe Rosana, que sempre me apoiou e enfrentou o mundo comigo; aos meus irmãos Ronan e Carlos, que ao meu lado enfrentaram as adversidades da vida; ao meu amado Yago, com quem sempre posso contar.

Agradecimentos

À Deus, por ser minha base e estrutura em momentos difíceis.

À minha família, que me apoiou apesar da rotina cansativa e que não me deixou desistir.

Aos meus professores, pela paciência e dedicação ao ensinar.

E aos amigos, que sempre me incentivaram e permaneceram do meu lado.

Para o meu triste céu estrelado.

Resumo

A lesão na medula espinhal prejudica o controle e a estabilidade dos membros superiores do corpo. Devido à isso, métodos de tecnologia assistiva são desenvolvidos para reestabelecer o equilíbrio da coluna vertebral, promovendo melhorias na qualidade de vida dos indivíduos afetados por esse tipo de lesão. Dentro desse panorama, sistemas de controle tem sido uma proposta com resultados positivos em terapias de equilíbrio postural, sendo desenvolvidos a partir da análise do comportamento dos membros superiores, como apresentado neste trabalho. Este estudo agrega conhecimentos sobre o controle postural e propõe a aplicação de técnicas de controle ao modelo matemático H2AT, que representa o comportamento do tronco humano submetido à uma lesão medular.

Palavras-chave: Lesão Medular, Modelo H2AT, Sistema Dinâmico, Controle Postural, Equilíbrio Postural.

Abstract

Spinal cord injury impairs the control and stability of the upper limbs. Due to this, assistive technology methods have been developed to re-establish spinal balance, improving the quality of life of individuals affected by this type of injury. Within this panorama, control systems have been a proposal with positive results in postural balance therapies, being developed from the analysis of the behavior of the upper limbs, as presented in this work. This study aggregate knowledge about postural control and proposes the application of control techniques to the H2AT mathematical model, which represents the behavior of the human torso subjected to a spinal cord injury.

Keywords: Spinal Cord Injury, H2AT Model, Dynamic System, Postural Control, Postural Balance.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de blocos.	16
Figura 2 – Exemplos de não linearidade.	19
Figura 3 – Esquema dinâmico H2AT.	21
Figura 4 – Sistema de controle PID.	22
Figura 5 – Curva de resposta em S.	23
Figura 6 – Curva de resposta em oscilação.	24
Figura 7 – Curva de resposta ao degrau unitário.	25
Figura 8 – Modelo de diagrama de blocos no Simulink.	26
Figura 9 – Integradores x e θ no Simulink.	28
Figura 10 – Equação da força linear (b_1) no Simulink.	29
Figura 11 – Equação do torque angular (b_2) no Simulink.	29
Figura 12 – Matriz $M(\vec{y})$ no Simulink.	29
Figura 13 – Sinal de x e θ	30
Figura 14 – Diagrama de blocos da malha de controle PID.	33
Figura 15 – Parâmetros gerados pelo <i>PID Tuner</i>	34
Figura 16 – Diagrama de blocos da malha de controle LQR.	35
Figura 17 – Diagrama de blocos da malha de controle LQR com atraso de transporte.	37
Figura 18 – Resposta do sistema com ganhos de alta magnitude.	39
Figura 19 – Resposta ao degrau da variável x	39
Figura 20 – Resposta ao degrau do ângulo θ com atraso por Padé.	40
Figura 21 – Resposta do ângulo com controlador LQR.	41
Figura 22 – Resposta da posição com controlador LQR.	41
Figura 23 – Resposta do ângulo à entrada de impulso.	42
Figura 24 – Resposta da posição à entrada de impulso.	43
Figura 25 – Resposta do LQR com atraso de transporte para θ	44
Figura 26 – Resposta do LQR com atraso de transporte para x	44

Lista de tabelas

Tabela 1 – Primeiro método da sintonia de Ziegler-Nichols.	23
Tabela 2 – Segundo método da sintonia de Ziegler-Nichols.	23

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Objetivos	14
1.1.1	Objetivo geral	14
1.1.2	Objetivos específicos	14
1.2	Estrutura do Trabalho	14
2	REFERENCIAL TEÓRICO	15
2.1	Controle Postural	15
2.2	Sistema dinâmico	15
2.2.1	Representações de sistemas	16
2.2.1.1	Diagramas de blocos	16
2.2.1.2	Função de transferência	17
2.2.1.3	Espaço de estado	17
2.2.1.4	Correlação entre representações	18
2.2.2	Linearidade	19
2.2.3	Estabilidade	20
2.2.4	Modelo matemático H2AT	21
2.3	Estratégias de Controle	22
2.3.1	Controlador PID	22
2.3.1.1	Desempenho de sistemas de controle	22
2.3.2	Regulador Linear Quadrático (LQR)	24
2.4	Programa de simulação MATLAB	25
3	MATERIAIS E MÉTODOS	27
3.1	Sistema H2AT	27
3.1.1	Linearização do modelo	27
3.2	Representação dos modelos	30
3.2.1	Representação em função de transferência	30
3.2.2	Representação em espaço de estados	31
3.3	Projeto dos controladores	32
3.3.1	Controlador PID	33
3.3.2	Controlador LQR	34
3.4	Definição dos Cenários de Simulação	36
3.4.1	Cenário 1: Resposta em Condições Nominais	36
3.4.2	Cenário 2: Robustez ao Atraso	36
3.5	Parâmetros do Solucionador	37

4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	38
4.1	Desempenho do Controlador PID	38
4.1.1	Resposta ao Degrau Unitário	38
4.1.2	Cenário com Atraso	39
4.2	Desempenho do Controlador LQR	40
4.2.1	Resposta à Condição Inicial	41
4.2.2	Rejeição de Perturbações	42
4.2.3	Cenário com Atraso	43
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS	46

1 Introdução

A lesão medular (LM) é um dano ao sistema nervoso que compromete de modo significativo a sensibilidade e o controle muscular do corpo, impactando a qualidade de vida e o bem-estar dos indivíduos afetados. Embora frequentemente relacionada a traumas, como acidentes, também pode ter causas não traumáticas, como doenças autoimunes, degenerativas, tumores e o envelhecimento, afetando uma parcela significativa da população mundial, variando entre 10,4 e 83 casos por milhão de habitantes anualmente ([LACERDA et al., 2024](#)). Por essa razão, a reabilitação e a fisioterapia são essenciais para recuperar o controle postural desses indivíduos condicionados ao uso da cadeira de rodas.

Segundo [Nascimento e Boffino \(2022\)](#), o controle postural não é apenas uma resposta reativa a um estímulo, mas sim a interação com o ambiente e a tarefa que está sendo realizada, como pegar um copo na mesa. Devido a isso, o corpo adota novos padrões de controle postural, utilizando partes do sistema sensorio-motor que não estão afetadas pela lesão medular. É então na fisioterapia e reabilitação que é estimulada a manutenção do equilíbrio, estando em posição sentada para que os indivíduos possuam uma autonomia funcional e um controle postural mais eficiente.

É nesse contexto que diversos estudos em robótica aplicada à biomecânica têm buscado promover a melhoria da qualidade de vida de pessoas com lesão medular, por meio de dispositivos de tecnologia assistiva. Entre eles, destacam-se: exoesqueletos robóticos, que utilizam estruturas vestíveis para melhorar a marcha e reduzir espasmos musculares; estimulação elétrica funcional (EEF) ou neuromuscular, voltada ao aumento da força e da função motora ([LACERDA et al., 2024](#)); órteses robóticas de apoio funcional, que auxiliam funções motoras e possibilitam maior independência; cadeiras de rodas adaptáveis e dispositivos de cadeiras inteligentes; além de sistemas de vigilância e monitoramento inteligentes ([SILVA et al., 2021](#)).

Para estudos relacionados à correção da instabilidade corporal, geralmente considera-se o corpo lesionado com movimento restrito ao plano sagital, ou seja, movimentos para frente e para trás, com retorno à posição inicial. Esse modelo, entretanto, não reproduz com exatidão os movimentos e reações do corpo humano, tendo em vista que diversos fatores físicos influenciam o movimento. Considerando essas limitações e buscando acrescentar novas perspectivas a esse ramo de estudo, o presente trabalho adota o modelo matemático H2AT (do inglês, *Head, 2 Arms and Trunk*), desenvolvido por [Blandeau et al. \(2016\)](#), que considera o corpo com lesão medular como um pêndulo invertido, tendo como objetivo o desenvolvimento de sistemas de controle, em ambiente simulado, capazes de reproduzir a estabilidade do corpo de pessoas com lesão medular na posição sentada, quando submetidas

a estímulos externos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Desenvolver sistemas de controle em um ambiente de simulação que colaborem com os estudos no âmbito de pessoas com lesão medular, focados em monitorar o equilíbrio da parte superior do corpo para a melhoria do controle postural na posição sentada.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Compreender o modelo matemático H2AT;
2. Validar, em *softwares* de simulação, a eficiência do modelo matemático H2AT;
3. Estudar diferentes estratégias de controle;
4. Escolher a estratégia de controle a ser adotada;
5. Desenvolver o controlador dentro do contexto de estudo;
6. Analisar os resultados obtidos na simulação.

1.2 Estrutura do Trabalho

Este estudo está organizado nos seguintes capítulos. O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico utilizado durante o desenvolvimento do trabalho. O Capítulo 3 expõe quais materiais e recursos computacionais foram empregados. O Capítulo 4 detalha o desenvolvimento do projeto e os resultados alcançados. Por fim, o Capítulo 5 discute o desempenho do sistema proposto e apresenta sugestões para trabalhos futuros como considerações finais.

2 Referencial Teórico

Este capítulo aborda as teorias e conceitos necessários para o desenvolvimento e projeto do controlador proposto para a simulação do controle postural de pessoas com lesão medular, discorrendo sobre sistemas dinâmicos, sistemas de controle e *softwares* de simulação.

2.1 Controle Postural

Diversas aplicações de sistemas de controle permeiam o cotidiano da sociedade, desenvolvidas para proporcionar melhorias e eficiência a equipamentos, objetos e máquinas. Analogamente, o corpo humano também é regido por sistemas de controle, os quais permitem a estabilidade e o funcionamento dos sistemas orgânicos, sejam eles voluntários ou involuntários, proporcionando uma vida funcional ao ser humano.

De acordo com [Kędziorek e Błażkiewicz \(2020\)](#), o controle postural é descrito como a resposta motora baseada em informações sensoriais que mantêm a postura ereta controlada. Trata-se de uma combinação de coordenação e equilíbrio postural, pois considera o alinhamento do tronco, o ambiente em que o indivíduo está inserido, as informações sensório-motoras, as perturbações externas e o movimento realizado.

Além desses fatores, o centro de massa corporal torna-se a principal variável a ser analisada em estudos sobre equilíbrio postural, uma vez que é alterado de acordo com a posição do corpo.

Dada a complexidade desse sistema, quando ocorre uma lesão traumática na medula espinhal, a resposta motora dos membros abaixo da lesão torna-se ausente ou limitada, pois a transmissão de informações sensoriais é comprometida, afetando o controle postural. Em função disso, são conduzidos estudos com o objetivo de melhorar e manter a postura ereta por meio do desenvolvimento de sistemas que simulem essa condição, utilizando estratégias de controle que contribuam para a avaliação da estabilidade do tronco durante a realização de atividades cotidianas.

2.2 Sistema dinâmico

A modelagem de um sistema dinâmico consiste em representar matematicamente o comportamento do sistema físico no ambiente, permitindo a análise de suas características físicas e matemáticas, sendo as equações diferenciais ordinárias (EDOs) uma das formas mais comuns de representação. Essa abordagem possibilita que o modelo seja adaptável

ao objeto de estudo, podendo ser estruturado de forma mais complexa e precisa, ou de forma simplificada, desconsiderando variáveis que não interferem significativamente na finalidade do estudo proposto.

2.2.1 Representações de sistemas

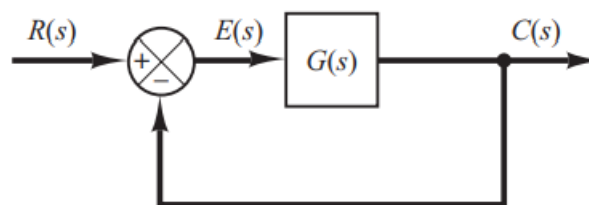
A representação das equações diferenciais ordinárias deve ser adequada para a análise da resposta dinâmica do sistema, seja de forma analítica ou numérica. Nesta seção, serão apresentadas as representações pertinentes ao trabalho, fundamentais para a elaboração do sistema em estudo.

2.2.1.1 Diagramas de blocos

Os diagramas de blocos são representações gráficas padronizadas de sistemas interconectados. Cada componente do sistema dinâmico que possui uma relação de Entrada/Saída é representado por um “bloco”, que, em sistemas lineares, geralmente corresponde a uma função de transferência. Outros tipos de blocos incluem fatores multiplicativos (ganhos), diferenciadores e integradores no tempo (KLUEVER, 2018).

Um diagrama de blocos descreve o fluxo de sinais e as relações funcionais entre os componentes, detalhando desde o início do processo (entrada) até o resultado final (saída). Ele ilustra como os subsistemas interagem sequencialmente e como as variáveis são processadas ao longo do caminho único de fluxo de informação.

Figura 1 – Diagrama de blocos.



Fonte: Ogata (2010, p.16)

Em sistemas de controle de malha fechada, a variável de saída é medida e comparada com a entrada de referência através de uma realimentação negativa em um ponto de soma (comparador).

Essa estrutura permite a correção de erros e a estabilização do sistema. Matematicamente, a relação final entre a saída e a entrada é definida pela função de transferência de malha fechada, permitindo a análise completa do comportamento dinâmico do processo. A Figura 1 apresenta um exemplo básico de um diagrama de blocos.

2.2.1.2 Função de transferência

A representação de sistemas por funções de transferência permite a identificação de parâmetros que ditam o comportamento da resposta do sistema de controle. As funções de transferência são obtidas pela aplicação da Transformada de *Laplace*, Equação (2.1), que converte a função $f(t)$ do domínio do tempo em uma função $F(s)$ no domínio da variável complexa s .

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2.1)$$

Elas expressam a relação entre as variáveis de entrada e as variáveis de saída de sistemas lineares representados por equações diferenciais invariantes no tempo. É possível obter a ordem do sistema pela função de transferência através da maior potência da variável s no denominador da função.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{saída}]}{\mathcal{L}[\text{entrada}]} = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_{m-1}s + b_m}{a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n} \quad (2.2)$$

A função de transferência é uma representação matemática que não descreve as características físicas internas do sistema; dessa forma, sistemas distintos podem apresentar a mesma função, desde que tenham o mesmo comportamento dinâmico. Por ser um modelo linear, ela independe da magnitude da entrada e pode ser obtida experimentalmente, pois seu objetivo é garantir que a resposta do sistema permaneça dentro dos parâmetros de desempenho desejados.

2.2.1.3 Espaço de estado

Além das funções de transferência, os sistemas dinâmicos podem ser descritos através da representação em espaço de estados. De acordo com [Kluever \(2018\)](#), o estado de um sistema é composto pelas variáveis dinâmicas mínimas que definam completamente suas características. As variáveis de estado representam um conjunto de variáveis dinâmicas que definem o comportamento físico do sistema, como deslocamento e velocidade, em sistemas mecânicos, mas também pode representar sistemas biológicos, econômicos e sociais.

A representação em espaço de estados descrita na Equação (2.3) utiliza x_n como variáveis de estado, u_n como variáveis de controle e y_m como saídas do sistema, n é o número de variáveis de estado, r o número de variáveis de entrada e m o número de variáveis de saída.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \\
y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t) \\
&\vdots \\
y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n; u_1, u_2, u_3, \dots, u_r; t)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Considerando as Equações (2.3) e (2.4) como um conjunto de seus elementos para cada variável, a forma da equação de estado pode ser reduzida a Equação (2.5), sendo a equação de estado, e Equação (2.6) a equação de saída.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \tag{2.6}$$

Para sistemas lineares ou quando ocorre a linearização de sistemas não lineares em torno de um ponto de operação, as equações assumem a forma matricial, facilitando a análise e o projeto de controladores. Nesse caso, o sistema é representado pelas matrizes de estado (A), de entrada (B), de saída (C) e de transmissão direta (D), conforme as Equações (2.7) e (2.8).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{2.7}$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \tag{2.8}$$

2.2.1.4 Correlação entre representações

É possível obter uma função de transferência a partir das equações no espaço de estados (OGATA, 2010, p.29). Aplicando a Transformada de Laplace nas Equações (2.7) e (2.8) e considerando as condições iniciais nulas, obtém-se expressão algébrica descrita na Equação (2.9), onde I representa a matriz identidade:

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

ou

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \tag{2.9}$$

A equação de saída transformada é dada por:

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \tag{2.10}$$

Ao isolar $X(s)$ na Equação (2.9) e substituí-lo na Equação (2.10), o resultado demonstra a relação direta entre as matrizes de estado e a função de transferência:

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

ou

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.11)$$

Sendo assim, a função de transferência $G(s)$ pode ser expressa em termos das matrizes A , B , C , e D .

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.12)$$

2.2.2 Linearidade

Muitos sistemas físicos não apresentam comportamento linear, ou seja, diferentes variáveis de entrada resultam em variáveis de saída que não obedecem aos princípios da homogeneidade ou da superposição. A não linearidade pode se manifestar através de fenômenos como saturação, zona morta ou folga, conforme exemplificado na [Figura 2](#).

Os sistemas não lineares podem ser linearizados, aproximando a equação diferencial em torno de um ponto de equilíbrio, onde as variações ao redor desse ponto podem ser desprezadas, fazendo com que o sistema se torne linear nesses intervalos onde a aproximação é válida.

Esses sistemas podem ser linearizados aproximando-se a equação não linear em torno de um ponto de equilíbrio. Nesse procedimento, assume-se que as variações ao redor desse ponto são pequenas, permitindo que os termos de ordem superior da expansão em série sejam desprezados e o modelo resultante se torne linear dentro desse intervalo de operação.

Figura 2 – Exemplos de não linearidade.



Fonte: [Nise \(2013, p.140\)](#)

A linearização é construída a partir da aplicação da expansão da função diferencial

em uma série de Taylor, como mostrada na Equação (2.13).

$$f(x_1, x_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_2 - \bar{x}_2) \right] + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1 - \bar{x}_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - \bar{x}_1)(x_2 - \bar{x}_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_2 - \bar{x}_2)^2 \right] + \dots \quad (2.13)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior (a partir da segunda derivada), obtém-se a equação linearizada válida para as proximidades do ponto de equilíbrio (\bar{x}_1, \bar{x}_2) :

$$y - \bar{y} = K_1(x_1 - \bar{x}_1) + K_2(x_2 - \bar{x}_2) \quad (2.14)$$

onde:

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2), \quad K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2}, \quad K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2} \quad (2.15)$$

2.2.3 Estabilidade

Um sistema de controle deve ser estável, sendo capaz de retornar ao seu ponto de equilíbrio quando submetido a uma perturbação ou de seguir uma referência desejada, mantendo o erro entre a saída e a entrada dentro de limites aceitáveis. De modo que, se o comportamento diverge dos limites definidos, o sistema é considerado instável.

Segundo Geromel e Korogui (2011, p. 81), “um sistema a tempo contínuo com função de transferência $H(s)$ é assintoticamente estável se todos os polos de $H(s)$ estiverem localizados na região $\text{Re}(s) < 0$ ”. Ou seja, todos os polos devem estar no semiplano esquerdo do plano complexo s .

Para garantir a estabilidade do sistema, são utilizados alguns critérios matemáticos, como o Critério de Routh-Hurwitz. Este método consiste na construção da tabela de Routh a partir dos coeficientes do polinômio característico, permitindo determinar o número de polos de malha fechada localizados no semiplano direito (instáveis) sem a necessidade de calcular suas raízes.

Outro método fundamental é o Critério de Nyquist, que utiliza a resposta em frequência da função de transferência de malha aberta para construir o diagrama polar (Diagrama de Nyquist). A estabilidade é determinada pela relação entre o contorno do diagrama e o ponto crítico $(-1, j0)$.

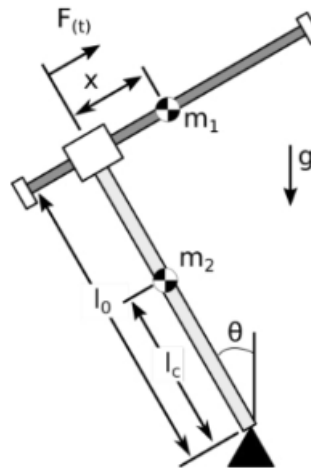
Por fim, o Critério de Lyapunov, aplicável tanto a sistemas lineares quanto não lineares, baseia-se na energia do sistema. Ele determina a estabilidade analisando se a derivada temporal de uma função de energia escalar $V(x)$ é negativa ao longo das trajetórias do sistema, indicando dissipação de energia e convergência para o equilíbrio.

2.2.4 Modelo matemático H2AT

Com a existência de diversos modelos dinâmicos, é possível identificar estruturas que apresentam comportamentos similares e, a partir disso, evoluir a complexidade desses modelos para demonstrar de forma mais precisa o funcionamento da estrutura em estudo.

Seguindo essa abordagem, o modelo matemático desenvolvido por [Blandeau et al. \(2016\)](#) para representar o tronco humano lesionado leva em consideração a incapacidade do indivíduo de manter a postura ereta devido à falta de controle muscular na região do quadril, consequência do dano ao sistema nervoso. Sendo assim, o modelo baseia-se em um pêndulo invertido com a adição de uma massa deslizante na parte móvel, representando o comportamento conjunto do tronco, braços e cabeça, conforme ilustrado na [Figura 3](#).

Figura 3 – Esquema dinâmico H2AT.



Fonte: [Blandeau et al. \(2016\)](#)

O comportamento dinâmico desse sistema é descrito pelas EDOs a seguir, na Equação (2.16), onde $J(x(t)) = m_1(l_0^2 + x^2(t)) + m_2l_c^2$, descrevendo o momento de inércia variável.

$$\begin{aligned}
 0 &= m_1\ddot{x}(t) - m_1l_0\ddot{\theta}(t) - m_1x(t)\dot{\theta}^2 + m_1g \sin(\theta(t)) - F(t - \tau(t)) \\
 0 &= -m_1l_0\ddot{x}(t) + J(x(t))\ddot{\theta}(t) + 2m_1x(t)\dot{x}(t)\dot{\theta}(t) - (m_1l_0 + m_2l_c)g \sin(\theta(t)) \\
 &\quad + m_1gx(t) \cos(\theta(t))
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Note que, embora as equações sejam não lineares, ambas as estruturas apresentam comportamentos físicos conhecidos e permitem alcançar a complexidade proposta nesse estudo. Modelos linearizados em espaço de estados ou utilizando funções de transferências serão obtidos na continuidade deste trabalho, a fim de se efetuarem comparações quanto à capacidade de descrição do comportamento do sistema.

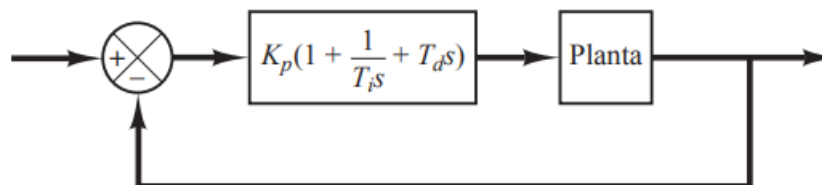
2.3 Estratégias de Controle

2.3.1 Controlador PID

Controladores são utilizados na operação de diversos setores de engenharia que envolvem um processos lógicos, atuando na regulação automática para garantir o desempenho desejado. Existem diversos tipos de controladores que são aplicados de acordo com o propósito do projeto, para que a eficiência ideal do sistema seja alcançada. Entre eles, destaca-se o controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID). Apesar dos diversos sistemas de controle existentes atualmente, como técnicas *fuzzy*, controle adaptativo, *machine learning*, o controlador PID ainda é amplamente empregado na indústria moderna, devido à sua robustez, simplicidade e eficácia em diferentes faixas de operação (SHUPRAJHAA; SUJIT; SRINIVASAN, 2022).

De modo geral, a estrutura de controle em malha fechada tem o objetivo de diminuir o erro entre o valor real na saída do sistema e o valor desejado ao longo do tempo. Tal processo ocorre através do controlador, projetado especificamente para a planta que se deseja controlar, e do sinal de referência, que representa o valor alvo a ser atingido (GEROMEL; KOROGUI, 2011). O diagrama de blocos da Figura 4 apresenta a estrutura descrita anteriormente.

Figura 4 – Sistema de controle PID.



Fonte: Ogata (2010, p.522)

Os parâmetros de um controlador PID podem ser determinados através do método de Ziegler-Nichols, que fornece valores estimados para o ganho proporcional (K_p), tempo integral (T_i) e tempo derivativo (T_d). Esses valores iniciais permitem que sejam realizados ajustes finos no controlador, até que seja obtida uma resposta satisfatória do sistema. Segundo Ogata (2010, p.522), o projeto do controlador PID pode ser realizado de forma analítica, com base no modelo matemático da planta, ou de forma experimental, caso a complexidade do sistema dificulte a obtenção de uma modelagem precisa.

2.3.1.1 Desempenho de sistemas de controle

Para que o desempenho de um sistema de controle seja analisado e considerado aceitável, é preciso que a resposta de controle esteja dentro de especificações de desempenho requisitadas pelo projeto, essas especificações determinam critérios como precisão, estabilidade, tempo de resposta do sistema, podendo ser alteradas de acordo com a necessidade

de adaptação do sistema. Essas alterações nos parâmetros do controlador são ditas como sintonias finas, ou ajustes finos.

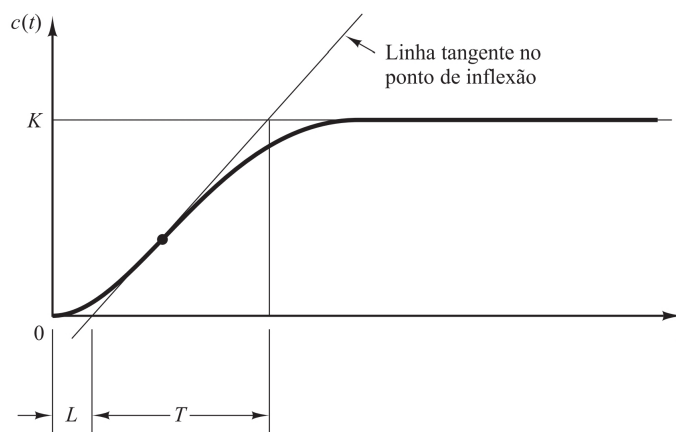
Segundo Ogata (2010, p.523), o primeiro método de Ziegler-Nichols é aplicado a sistemas cuja resposta ao degrau exibe uma curva em formato de S, conforme a Figura 5. Essa curva é caracterizada pelo tempo de atraso L e pela constante de tempo T . Os valores iniciais de K_p , T_i e T_d são definidos conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Primeiro método da sintonia de Ziegler-Nichols.

Controlador	K_p	T_i	T_d
PID	$1,2\frac{T}{L}$	$2L$	$0,5L$

Fonte: Adaptado de Ogata (2010, p.524)

Figura 5 – Curva de resposta em S.



Fonte: Ogata (2010, p.523)

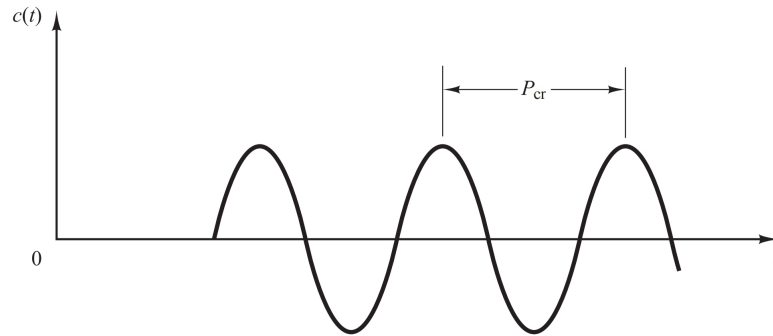
O segundo método de Ziegler-Nichols é utilizado quando o sistema pode instabilizar de forma controlada. O método consiste em utilizar apenas a ação proporcional, aumentando o ganho K_p até atingir um valor crítico K_{cr} , no qual o sistema exibe oscilações sustentadas na saída, conforme a Figura 6. Vale ressaltar que, se a resposta não exibir oscilações, este método não é aplicável. A partir do ganho crítico K_{cr} e do período crítico P_{cr} determinados experimentalmente, os parâmetros K_p , T_i e T_d são calculados conforme a Tabela 2.

Tabela 2 – Segundo método da sintonia de Ziegler-Nichols.

Controlador	K_p	T_i	T_d
PID	$0,6K_{cr}$	$0,5P_{cr}$	$0,125P_{cr}$

Fonte: Adaptado de Ogata (2010, p.525)

Figura 6 – Curva de resposta em oscilação.



Fonte: Ogata (2010, p.524)

2.3.2 Regulador Linear Quadrático (LQR)

Outra estratégia de controle amplamente disseminada é o Regulador Linear Quadrático (LQR). Diferente do PID, que atua no erro da saída, o LQR fundamenta-se na teoria de controle ótimo e utiliza a representação em espaço de estados. A aplicação desse método é considerada ideal para sistemas como o pêndulo invertido, cuja dinâmica é amplamente estudada na engenharia como um *benchmark* para validação de algoritmos de estabilização.

Apesar da complexidade dinâmica e da não linearidade intrínseca do pêndulo invertido, o LQR permite a implementação de uma lei de controle de realimentação de estados capaz de garantir a estabilidade robusta em torno do ponto de equilíbrio vertical. Devido a essas características, sistemas complexos que envolvem múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) adotam preferencialmente esse método (CHACKO; NEERAJ; ABRAHAM, 2024).

O objetivo do projeto LQR é determinar a matriz de ganho K da lei de controle ótima $u(t) = -Kx(t)$, de modo a minimizar a função de custo quadrática J , descrita na Equação (2.17).

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (2.17)$$

Onde Q é a matriz de ponderação dos estados, cuja função é penalizar os desvios de trajetória, priorizando a precisão do sistema. Já a matriz R pondera o esforço de controle, penalizando o gasto de energia ou a magnitude da atuação exigida para realizar a manobra.

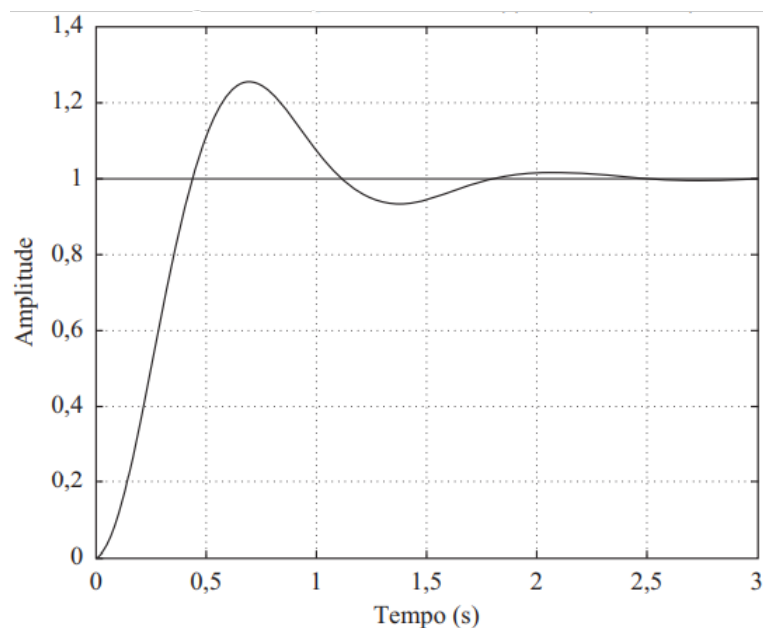
Segundo Masti, Zanon e Bemporad (2022), apesar da sua robustez teórica, a implementação prática do LQR enfrenta o desafio da seleção adequada das matrizes Q e R , pois a escolha destes parâmetros é frequentemente realizada por tentativa e erro ou baseada na experiência do projetista, o que pode não garantir o cumprimento de requisitos específicos de desempenho, como o rastreamento de um modelo de referência ou restrições temporais.

2.4 Programa de simulação MATLAB

No decorrer deste capítulo foi mencionado sobre a análise da resposta de sistemas de controle, que é fundamental para a validação do projeto, essa representação é frequentemente realizada através do programa computacional MATLAB, que utiliza linguagem de programação própria. O *software* é amplamente utilizado em engenharia para desenvolvimento de algoritmos, modelagem matemática e análise de dados, sendo eficiente no emprego de matrizes e sistemas dinâmicos.

O ambiente MATLAB permite a manipulação direta de equações diferenciais, facilitando a transformação e simulação de modelos matemáticos, seja através de funções de transferência ou da representação em espaço de estados. Além de resolver equações de alta complexidade, o *software* gera representações gráficas precisas do comportamento temporal do sistema, como a resposta ao degrau ilustrada na [Figura 7](#).

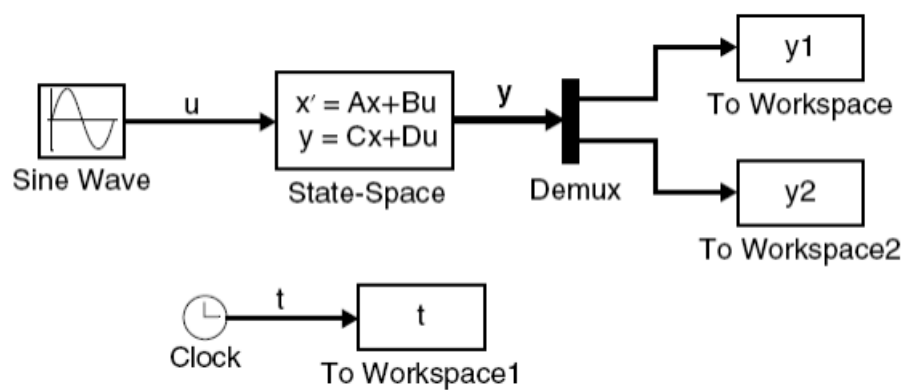
Figura 7 – Curva de resposta ao degrau unitário.



Fonte: Ogata (2010, p.172)

Uma das ferramentas integradas ao MATLAB é o Simulink ([Figura 8](#)), que, diferente da programação em texto, possui uma interface gráfica, possibilitando inclusive a criação de diagramas de blocos com as informações de sinais de entrada, função de transferência, integradores, ganhos, realimentação do sistema, obtendo a solução de sistemas dinâmicos compostos por EDOs lineares ou mesmo não-lineares.

Figura 8 – Modelo de diagrama de blocos no Simulink.



Fonte: Kluever (2018, p.921)

3 Materiais e métodos

3.1 Sistema H2AT

Cada movimento realizado pelo corpo humano é gerado por estímulos, sejam eles voluntários ou não, e executado a partir da comunicação do cérebro com a parte do corpo que se deseja movimentar, como o ato de alcançar um objeto ou simplesmente piscar, o que requer uma força necessária para estimular os nervos do músculo. É por isso que pessoas com lesão na medula têm dificuldade ou inabilidade de movimentar os membros inferiores e até superiores, dependendo da área lesionada, pois a transmissão neural não consegue estimular o músculo que se deseja movimentar ou, ainda que consiga, o tempo de reação é diferente de uma pessoa que não possui a lesão medular.

No sistema apresentado neste trabalho, esse atraso entre o estímulo neural e a força necessária para realizar o movimento é expresso através do atraso τ , presente na equação que demonstra o comportamento de se manter em equilíbrio em $F(t - \tau(t))$, como um tempo de reação atrasado.

O sistema é definido como um sistema dinâmico não linear de segunda ordem, com dois graus de liberdade representados por x e θ , sendo x o deslocamento da haste deslizante e θ o ângulo de inclinação do pêndulo. As equações são chamadas de equações acopladas por dependerem da solução dos termos em um mesmo sistema.

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 \ddot{x}(t) - m_1 l_0 \ddot{\theta}(t) - m_1 x(t) \dot{\theta}^2(t) + m_1 g \sin(\theta(t)) - F(t - \tau(t)) \\ 0 &= -m_1 l_0 \ddot{x}(t) + J(x(t)) \ddot{\theta}(t) + 2m_1 x(t) \dot{x}(t) \dot{\theta}(t) \\ &\quad - (m_1 l_0 + m_2 l_c) g \sin(\theta(t)) + m_1 g x(t) \cos(\theta(t)). \end{aligned} \quad (3.1)$$

O momento de inércia total da barra deslizante é dado por:

$$J(x(t)) = m_1 (l_0^2 + x^2(t)) + m_2 l_c^2 \quad (3.2)$$

Para os parâmetros biomecânicos, considera-se um homem de 80 kg e o uso de regras de regressão: $m_1 = 16,1$ kg (massa do segmento superior: cabeça, pescoço e braços), $m_2 = 26,64$ kg (massa do tronco), $l_0 = 477$ mm (comprimento do tronco) e $l_c = 276,66$ mm (distância ao centro de massa do tronco), conforme descrito por [Blandeau et al. \(2016\)](#).

3.1.1 Linearização do modelo

Para realizar a simulação do sistema dinâmico no ambiente Simulink, define-se a forma matricial $M(\vec{y})\vec{a}(t) = \vec{b}(t)$, conforme a Equação (3.3). Essa representação permite a

obtenção das acelerações \ddot{x} e $\ddot{\theta}$ ao isolar o vetor $\vec{a}(t)$.

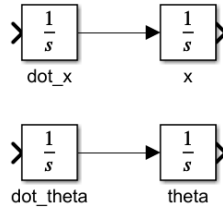
$$\begin{bmatrix} m_1 & -m_1 l_0 \\ -m_1 l_0 & J(x(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 x(t) \dot{\theta}^2 - m_1 g \sin(\theta(t)) + F(t - \tau(t)) \\ -2m_1 x(t) \dot{x}(t) \dot{\theta}(t) + (m_1 l_0 + m_2 l_c) g \sin(\theta(t)) - \\ m_1 g x(t) \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Define-se então o vetor de estado \vec{y} e a sua derivada temporal:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \frac{d}{dt} \vec{y} = f(\vec{y}, t) \quad (3.4)$$

Foram utilizados blocos integradores para representar os estados, conforme a [Figura 9](#), construindo-se as equações baseadas na forma matricial, onde b_1 representa as forças lineares e b_2 o torque angular.

Figura 9 – Integradores x e θ no Simulink.



Fonte: Autora.

Para incluir a matriz de inércia, adicionam-se os elementos correspondentes, expressando o valor de $J(x(t))$ em um bloco de função. O cálculo da matriz inversa é realizado utilizando os valores de $M(\vec{y})$ e do vetor $\vec{b}(t)$ total, cujos sinais b_1 e b_2 são unidos pela função *Vector Concatenate* no Simulink, conforme ilustrado nas [Figuras 10](#), [11](#) e [12](#).

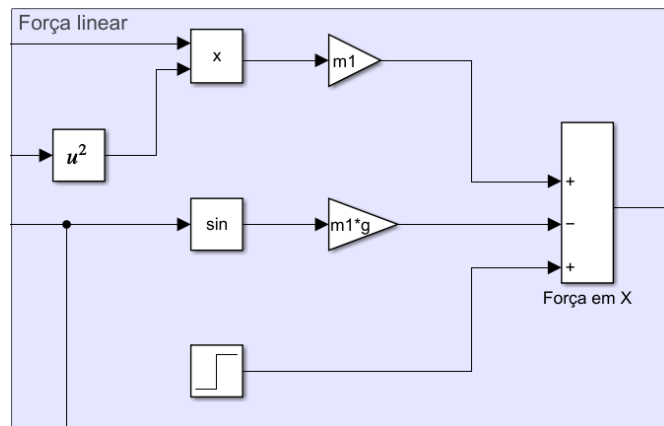
A partir da equação original do sistema (Equação (3.1)), é possível obter a linearização dos estados considerando o ponto de operação na origem (equilíbrio vertical). A nova equação, apresentada em (3.5), é fundamental para o desenvolvimento do projeto, pois corresponde fisicamente ao modelo H2AT original, porém com complexidade reduzida para a aplicação dos métodos de controle.

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 \ddot{x}(t) - m_1 l_0 \ddot{\theta}(t) + m_1 g \theta(t) - F(t) \\ 0 &= -m_1 l_0 \ddot{x}(t) + J_0 \ddot{\theta}(t) + m_1 g x(t) - (m_1 l_0 + m_2 l_c) g \theta(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde o momento de inércia linearizado J_0 é dado por:

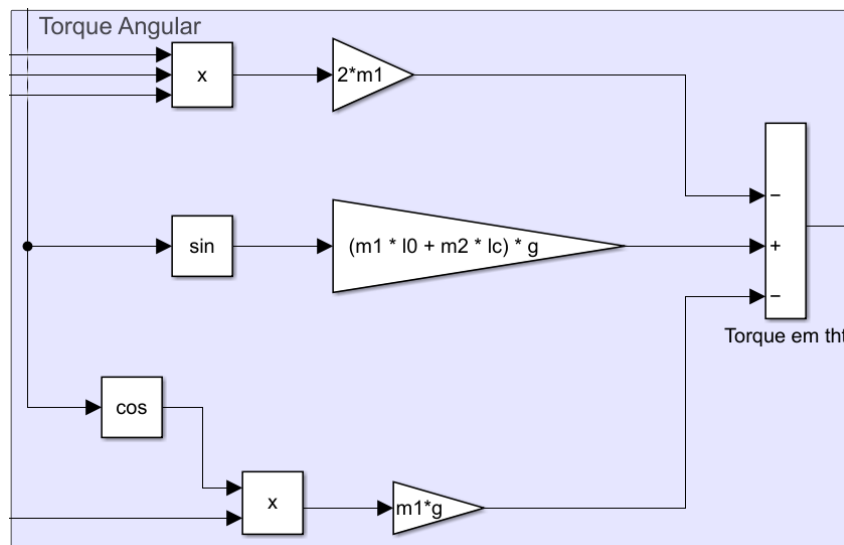
$$J_0 = J(0) = m_1 l_0^2 + m_2 l_c^2 \quad (3.6)$$

Figura 10 – Equação da força linear (b_1) no Simulink.



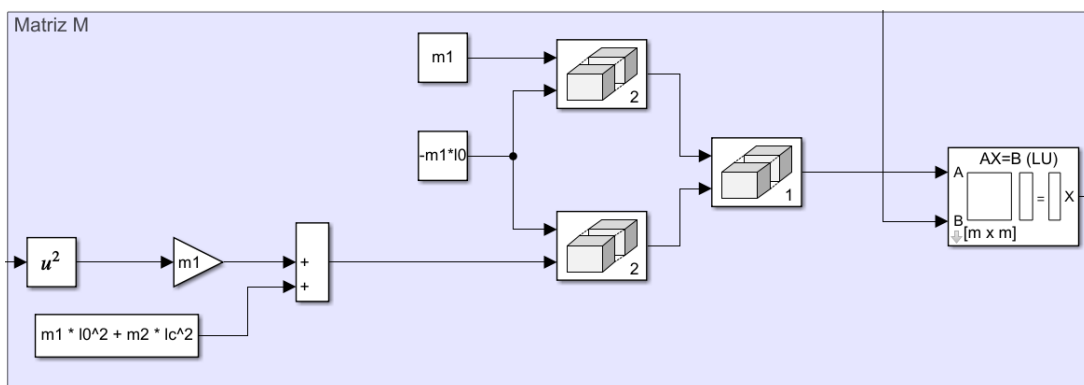
Fonte: Autora.

Figura 11 – Equação do torque angular (b_2) no Simulink.



Fonte: Autora.

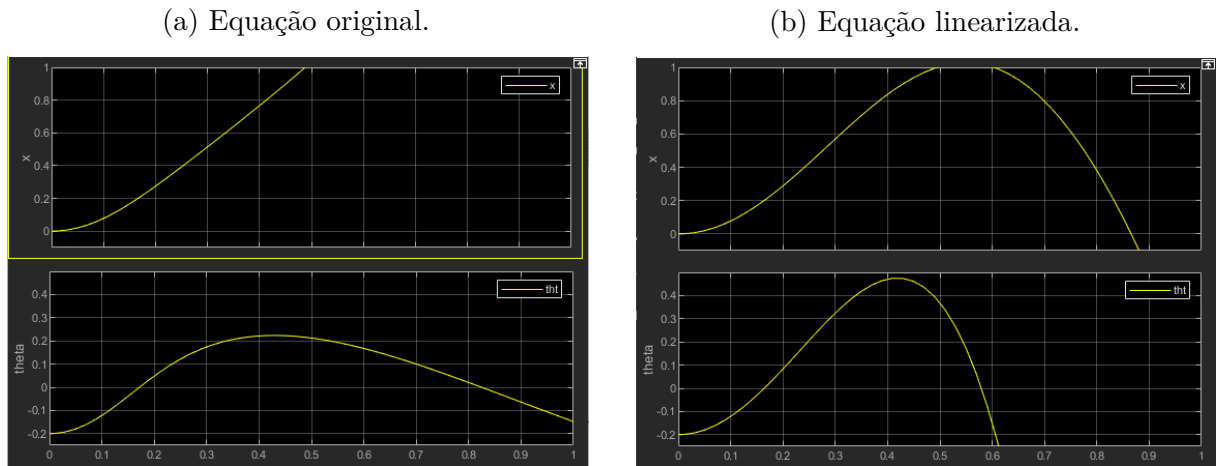
Figura 12 – Matriz $M(\vec{y})$ no Simulink.



Fonte: Autora.

A comparação entre os sinais da equação original e da equação linearizada (Figura 13) evidencia o limite em que a linearização é válida e demonstra que o comportamento dinâmico é similar para pequenas oscilações, validando a simplificação. É possível observar como o ângulo θ é afetado pela dinâmica de x , indicando que a falta de controle resultaria na queda do indivíduo com lesão medular.

Figura 13 – Sinal de x e θ .



Fonte: Autora.

3.2 Representação dos modelos

Um sistema dinâmico pode ser representado por diferentes abordagens matemáticas que descrevem seu comportamento ao longo do tempo. Em sistemas de controle, duas representações são amplamente utilizadas: a função de transferência, que expressa a relação entre a entrada e a saída do sistema no domínio da frequência, e o modelo no espaço de estados, que descreve a dinâmica do sistema por meio de um conjunto de variáveis de estado no domínio do tempo. Esta seção aborda a aplicação da função de transferência na construção do sistema de controle proposto.

3.2.1 Representação em função de transferência

Para a obtenção das funções de transferência, aplica-se a Transformada de Laplace às equações linearizadas (Equação (3.5)). Considerando as condições iniciais nulas e modelando o atraso temporal como $e^{-\tau s}$, obtém-se o sistema de equações algébricas a seguir:

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 s^2 X(s) - m_1 l_0 s^2 \Theta(s) + m_1 g \Theta(s) - F(s) e^{-\tau s} \\ 0 &= -m_1 l_0 s^2 X(s) + J_0 s^2 \Theta(s) + m_1 g X(s) - (m_1 l_0 + m_2 l_c) g \Theta(s) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Reorganizando os termos para isolar as variáveis dependentes $X(s)$ e $\Theta(s)$, chega-se ao sistema matricial linear apresentado na Equação (3.8):

$$\begin{cases} m_1 s^2 X(s) + (m_1 g - m_1 l_0 s^2) \Theta(s) = F(s) e^{-\tau s} \\ (m_1 g - m_1 l_0 s^2) X(s) + [J_0 s^2 - (m_1 l_0 + m_2 l_c) g] \Theta(s) = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Resolvendo o sistema linear para $X(s)$ e $\Theta(s)$ (utilizando, por exemplo, a Regra de Cramer) e substituindo a expressão de J_0 (Equação 3.2), obtêm-se as funções de transferência que relacionam o deslocamento da haste e o ângulo do pêndulo com a força de entrada $F(s)$:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \left(\frac{(m_1 l_0^2 + m_2 l_c^2) s^2 - (m_1 l_0 + m_2 l_c) g}{m_1 m_2 l_c^2 s^4 + m_1 g (m_1 l_0 - m_2 l_c) s^2 - m_1^2 g^2} \right) e^{-\tau s} \quad (3.9)$$

$$\frac{\Theta(s)}{F(s)} = \left(\frac{m_1 l_0 s^2 - m_1 g}{m_1 m_2 l_c^2 s^4 + m_1 g (m_1 l_0 - m_2 l_c) s^2 - m_1^2 g^2} \right) e^{-\tau s} \quad (3.10)$$

3.2.2 Representação em espaço de estados

A partir das equações linearizadas, é possível extrair, através de manipulações algébricas, a representação do sistema em espaço de estados. Essa abordagem é vantajosa para o sistema em estudo, pois permite o desacoplamento das dinâmicas de posição linear x e angular θ , facilitando a comparação entre diferentes métodos de controle.

A primeira etapa consiste em definir as variáveis de estado x_1, x_2, x_3, x_4 , relacionando-as com as coordenadas físicas e suas derivadas, conforme a Equação (3.11).

$$\begin{aligned} x_1 = x(t) & \quad \dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \\ x_2 = \dot{x}(t) & \quad \dot{x}_2 = \ddot{x} \\ x_3 = \theta(t) & \quad \dot{x}_3 = \dot{\theta} = x_4 \\ x_4 = \dot{\theta}(t) & \quad \dot{x}_4 = \ddot{\theta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como as expressões para as acelerações \ddot{x} e $\ddot{\theta}$ estão acopladas na formulação original, reorganiza-se o sistema linearizado na forma matricial $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}$, descrita na Equação (3.12).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & -m_1 l_0 \\ -m_1 l_0 & J_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 g \theta(t) - F(t - \tau(t)) \\ -(m_1 l_0 + m_2 l_c) g \theta(t) + m_1 g x(t) \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Para isolar as acelerações, multiplica-se a equação pela inversa da matriz de inércia (\mathbf{M}^{-1}), utilizando o cálculo do determinante:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(\mathbf{M})} \begin{bmatrix} J_0 & m_1 l_0 \\ m_1 l_0 & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 g \theta(t) - F(t - \tau(t)) \\ -(m_1 l_0 + m_2 l_c) g \theta(t) + m_1 g x(t) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Desenvolvendo o produto matricial e substituindo $J_0 = m_1 l_0^2 + m_2 l_c^2$, obtém-se a expressão desacoplada para \ddot{x} :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{1}{\det(\mathbf{M})} [J_0(m_1 g \theta - F) + m_1 l_0 (-(m_1 l_0 + m_2 l_c) g \theta + m_1 g x)] \\ \therefore \ddot{x} &= \left(-\frac{m_1 l_0 g}{m_2 l_c^2} \right) x(t) + \left(\frac{g(l_0 - l_c)}{l_c} \right) \theta(t) + \left(\frac{m_1 l_0^2 + m_2 l_c^2}{m_1 m_2 l_c^2} \right) F(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (3.14)$$

De forma análoga, obtém-se a expressão para $\ddot{\theta}$:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{1}{\det(\mathbf{M})} [m_1 l_0 (m_1 g \theta - F) + m_1 (-(m_1 l_0 + m_2 l_c) g \theta + m_1 g x)] \\ \therefore \ddot{\theta} &= \left(-\frac{m_1 g}{m_2 l_c^2} \right) x(t) + \left(\frac{g}{l_c} \right) \theta(t) + \left(\frac{l_0}{m_2 l_c^2} \right) F(t - \tau(t)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Com as equações diferenciais isoladas, as derivadas das variáveis de estado são definidas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \left(-\frac{m_1 l_0 g}{m_2 l_c^2} \right) x_1 + \left(\frac{g(l_0 - l_c)}{l_c} \right) x_3 + \left(\frac{J_0}{m_1 m_2 l_c^2} \right) u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \left(-\frac{m_1 g}{m_2 l_c^2} \right) x_1 + \left(\frac{g}{l_c} \right) x_3 + \left(\frac{l_0}{m_2 l_c^2} \right) u \end{aligned} \quad (3.16)$$

Finalmente, organizando o sistema no formato padrão $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ e $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$, obtêm-se as matrizes do modelo linearizado:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_1 l_0 g}{m_2 l_c^2} & 0 & \left(\frac{l_0}{l_c} - 1 \right) g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m_1 g}{m_2 l_c^2} & 0 & \frac{g}{l_c} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l_0^2}{m_2 l_c^2} + \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{l_0}{m_2 l_c^2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3 Projeto dos controladores

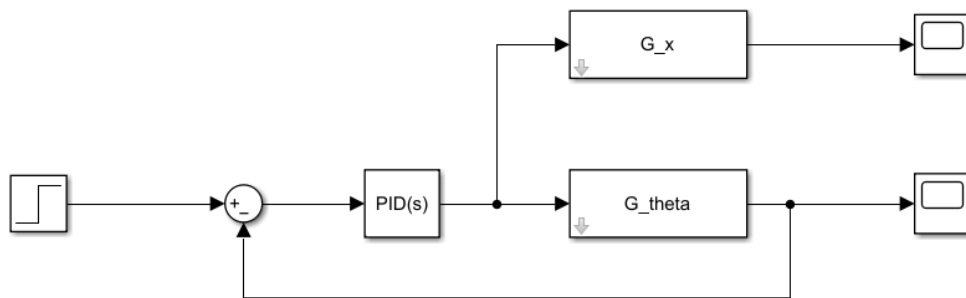
Uma vez estabelecidas a modelagem e a representação do sistema, esta seção aborda a etapa de implementação e sintonia das leis de controle em ambiente de simulação. Foram propostas duas abordagens distintas para fins de comparação de desempenho: um controlador PID clássico e um Regulador Linear Quadrático (LQR).

3.3.1 Controlador PID

A primeira estratégia avaliada foi o controlador PID, adotado como abordagem inicial na tentativa de garantir a estabilidade do sistema H2AT na posição vertical. Para a sintonia dos parâmetros, utilizou-se a ferramenta de ajuste automático do Simulink, o *PID Tuner*. Esse recurso permite a visualização interativa do *root locus* e da resposta ao degrau, facilitando a análise do comportamento dinâmico.

Dado que o sistema é do tipo SIMO (*Single-Input Multi-Output*), apresentando duas saídas (posição $x(t)$ e ângulo $\theta(t)$) e apenas uma entrada de controle (força $F(t)$), a estratégia priorizou a estabilização do ângulo θ . Essa decisão justifica-se pelo fato de que o deslocamento horizontal da base é uma consequência direta da necessidade de manter o equilíbrio angular. A estrutura da malha de controle implementada é apresentada na Figura 14.

Figura 14 – Diagrama de blocos da malha de controle PID.



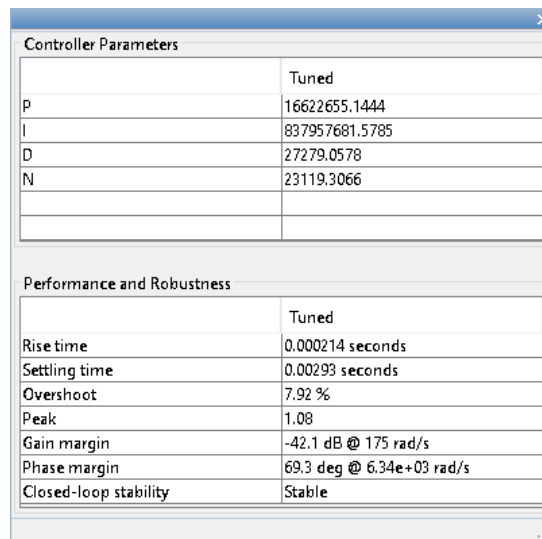
Fonte: Autora.

Devido à dinâmica instável de malha aberta do pêndulo invertido (caracterizada por um polo no semiplano direito), o sistema exige que o tempo de resposta do controlador seja inferior à constante de tempo de queda natural da haste. No entanto, durante o processo de sintonia, observou-se que as configurações capazes de garantir a estabilidade matemática exigiam ganhos proporcionais e derivativos de magnitude impraticável (ordem de 10^6 a 10^8) para atingir um tempo de resposta inferior a 0,2 ms, conforme os dados da Figura 15. Na prática, tais valores demandariam esforços de controle excessivos, levando à imediata saturação de qualquer atuador real.

Adicionalmente, a validação em simulação temporal revelou divergência. Ao aplicar os parâmetros sugeridos pelo sintonizador automático na malha fechada, o sistema apresentou instabilidade imediata. Tentativas subsequentes de sintonia fina utilizando o *Control System Designer* também não obtiveram êxito, devido às limitações de margem de fase impostas pelo polo instável da função de transferência $G_\theta(s)$. Diante da inviabilidade de estabilizar robustamente o ângulo $\theta(t)$ com uma estrutura PID simples, o controle da posição $x(t)$ tornou-se secundário e optou-se pela migração para uma estratégia de controle baseada em espaço de estados (LQR), capaz de lidar melhor com sistemas multivariáveis

acoplados.

Figura 15 – Parâmetros gerados pelo *PID Tuner*.



Controller Parameters	
	Tuned
P	16622655.1444
I	837957681.5785
D	27279.0578
N	23119.3066
Performance and Robustness	
	Tuned
Rise time	0.000214 seconds
Settling time	0.00293 seconds
Overshoot	7.92 %
Peak	1.08
Gain margin	-42.1 dB @ 175 rad/s
Phase margin	69.3 deg @ 6.34e+03 rad/s
Closed-loop stability	Stable

Fonte: Autora.

3.3.2 Controlador LQR

Devido às limitações de saturação e instabilidade observadas com o controle PID, a aplicação de uma estratégia de controle moderna baseada em espaço de estados foi considerada mais adequada, selecionando-se o Regulador Linear Quadrático (LQR). Esta técnica é amplamente utilizada em sistemas do tipo pêndulo invertido, pois lida simultaneamente com todas as variáveis de estado (posição linear, velocidade linear, ângulo e velocidade angular) através de uma única lei de controle de realimentação, dada por $u(t) = -K\mathbf{x}(t)$.

O objetivo do LQR é determinar o vetor de ganhos K que minimize a função custo quadrática J , conforme definida na Equação (2.17). Essa função avalia o desempenho do sistema ponderando o compromisso entre a minimização do erro de trajetória e o gasto de energia do atuador.

O valor da função custo J foi obtido através da solução da Equação Algébrica de Riccati (S), fornecida pelo comando `lqr` do MATLAB, calculada para uma condição inicial específica de desequilíbrio.

Para a sintonia do controlador, a estratégia adotada priorizou a suavidade dos movimentos e a viabilidade prática da implementação física. Nesse contexto, a matriz de ponderação de estados Q foi definida para impor um peso significativamente maior sobre as velocidades (\dot{x} e $\dot{\theta}$) em relação às posições (x e θ). Dada a natureza instável da planta, a atribuição de uma penalidade superior aos termos de velocidade (com valores de 1000 na diagonal principal) em comparação aos de posição (valores de 100) tem como objetivo aumentar o amortecimento do sistema. Essa escolha resulta em uma resposta dinâmica

com menos oscilações, promovendo uma estabilização mais segura e gradual do modelo biomecânico.

Simultaneamente, a matriz de ponderação do esforço de controle foi definida com o valor escalar $R = 10$. Essa magnitude impõe uma restrição rigorosa sobre a atuação, penalizando correções excessivamente bruscas ou energeticamente custosas. O objetivo principal dessa ponderação é limitar a amplitude do sinal de controle $u(t)$, garantindo que o sistema opere dentro de uma região linear válida e prevenindo a saturação física dos atuadores simulados. As matrizes finais adotadas para o projeto são apresentadas a seguir:

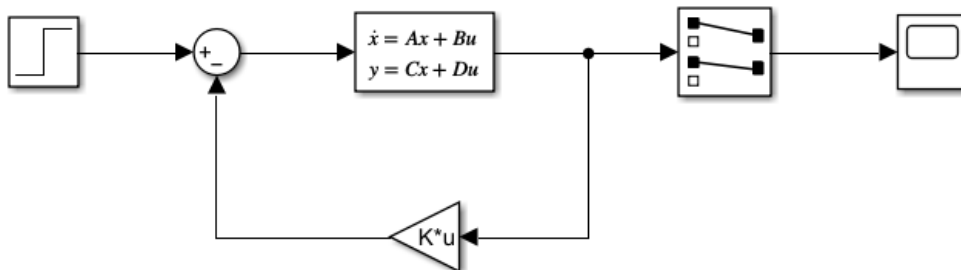
$$Q = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}, \quad R = [10] \quad (3.18)$$

A partir dessas matrizes de ponderação e do modelo linearizado do sistema (cujas matrizes A e B foram apresentadas na Equação (3.17)), o vetor de ganhos ótimos K foi calculado utilizando o algoritmo de Riccati, através do comando `lqr` do software MATLAB. O vetor resultante foi:

$$K = [-3456,0 \quad -685,3 \quad 2914,6 \quad 564,8] \quad (3.19)$$

Observa-se que os ganhos apresentam valores na ordem de 3×10^3 . Embora elevados, esses valores são significativamente menores que os exigidos pelo PID (ordem de 10^8), tornando a implementação física viável. A magnitude dos ganhos é uma consequência direta da escolha da matriz Q robusta, indicando que o controlador exercerá a força necessária para corrigir pequenos desvios angulares rapidamente, garantindo o equilíbrio do modelo H2AT.

Figura 16 – Diagrama de blocos da malha de controle LQR.



Fonte: Autora.

Além dos ganhos de realimentação, a solução da Equação Algébrica de Riccati fornece o custo teórico mínimo associado a essa sintonia. Para uma condição inicial de desequilíbrio de 5° ($0,087$ rad), o custo de desempenho calculado foi de $J_{\text{teórico}} \approx 329.193,53$.

Este valor serve como referência de otimalidade para o projeto, indicando o limite inferior da relação entre esforço de controle e erro de trajetória esperado para o modelo linearizado.

A implementação da malha de controle no ambiente Simulink é realizada pela realimentação negativa do vetor de estados multiplicado pelo ganho K , conforme ilustrado na [Figura 16](#).

3.4 Definição dos Cenários de Simulação

Para validar o desempenho e a robustez dos controladores projetados, estabeleceram-se dois cenários distintos de simulação no ambiente Simulink. Estes cenários buscam reproduzir situações críticas de operação do modelo biomecânico H2AT, avaliando a capacidade do sistema em recuperar a estabilidade a partir de condições adversas e sob o efeito de atrasos de transporte.

3.4.1 Cenário 1: Resposta em Condições Nominais

O primeiro cenário avalia a resposta transitória do sistema em condições ideais, sem a presença de perturbações externas ou atrasos na malha de controle. O objetivo é verificar a capacidade de estabilização do sistema a partir de um estado de desequilíbrio.

Devido às características intrínsecas de cada estratégia, adotaram-se configurações de teste distintas. Para o controlador PID, a abordagem foca na análise de rastreamento através da resposta ao degrau unitário. Nesse caso, o sistema parte do repouso e é submetido a uma mudança súbita de referência, simulando uma solicitação voluntária de mudança de postura. Em contrapartida, para o controlador LQR, avalia-se a resposta de regulação frente a uma condição inicial. Definiu-se uma inclinação do tronco no instante $t = 0$, sem aplicação de referência externa, com posição angular inicial de $\theta_0 = -0,2$ rad. Este valor representa o estado natural do tronco humano em posição sentada (levemente reclinado), tendo como objetivo zerar a diferença angular ($\theta \rightarrow 0$) e minimizar o tempo de acomodação.

3.4.2 Cenário 2: Robustez ao Atraso

O segundo cenário introduz um elemento característico em sistemas biológicos e digitais: o intervalo de tempo entre a detecção do estímulo sensorial e a geração da resposta motora efetiva. O objetivo deste cenário é avaliar a robustez das estratégias de controle diante do comprometimento da estabilidade causado por esse atraso.

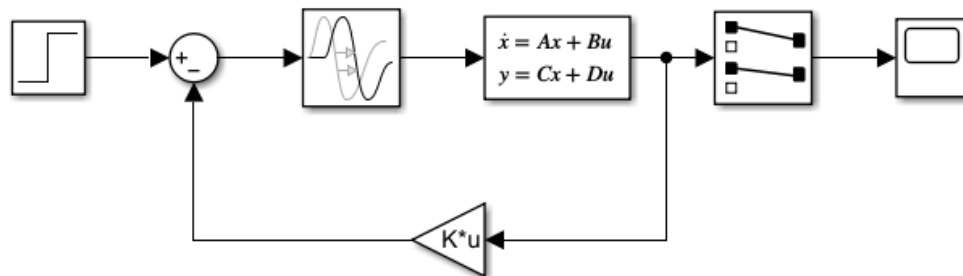
Para a representação matemática desse fenômeno, adotaram-se abordagens distintas conforme cada controlador.

No projeto do controlador PID, o atraso foi modelado através da Aproximação de Padé na função de transferência. Essa técnica é necessária para converter o termo exponen-

cial do atraso puro ($e^{-\tau s}$) em uma função racional composta por polos e zeros, permitindo a análise de estabilidade pelos métodos clássicos de controle linear. A aproximação de Padé é uma técnica que usa uma razão de polinômios para reproduzir os termos iniciais da série de Taylor de uma função, resultando em uma aproximação mais precisa e eficiente do que expansões polinomiais tradicionais (MIGUEL; ELIAS; BECK, 2024).

Em contrapartida, para o controlador LQR, a simulação foi realizada diretamente no domínio do tempo, permitindo a inserção de um bloco de *Transport Delay* na malha de realimentação do Simulink. Essa abordagem insere um atraso puro no sinal de estados lido pelo controlador, sem a necessidade de aproximações polinomiais.

Figura 17 – Diagrama de blocos da malha de controle LQR com atraso de transporte.



Fonte: Autora.

O valor definido para o atraso foi de $\tau = 0,05$ s. Essa magnitude é compatível com os tempos de latência associados à transmissão neural e ao acionamento eletromecânico muscular em indivíduos com limitações neuromusculares.

3.5 Parâmetros do Solucionador

A solução numérica das equações diferenciais do modelo H2AT foi realizada utilizando o algoritmo `ode45` (Dormand-Prince) do MATLAB/Simulink. Este método de passo variável foi selecionado por oferecer um equilíbrio eficiente entre precisão numérica e custo computacional para sistemas não rígidos. Para garantir a fidelidade dos resultados, definiram-se os parâmetros de simulação com um tempo total de 5 segundos para ambos os cenários e uma tolerância relativa de 1×10^{-3} (padrão do *software*). Além disso, o passo de integração foi mantido em configuração automática (*Variable-step*), permitindo que o solucionador refine o passo em momentos de transição rápida do sistema, garantindo a precisão das curvas obtidas.

4 Resultados e Discussões

Neste capítulo, são apresentados os resultados das simulações computacionais realizadas no ambiente Simulink, conforme a metodologia descrita anteriormente. A análise concentra-se no comportamento dinâmico do ângulo de inclinação (θ) e da posição linear (x), bem como no esforço de controle demandado, considerando tanto cenários de operação nominal quanto situações sujeitas a atrasos e distúrbios.

4.1 Desempenho do Controlador PID

A estratégia de controle PID implementada opera em malha fechada, utilizando exclusivamente a realimentação do erro angular (θ). O algoritmo calcula a diferença entre o sinal de referência (degrau) e a resposta instantânea do pêndulo, gerando o sinal de controle (força) necessário para corrigir o desvio.

Em contrapartida, a dinâmica da posição linear (x) permanece em malha aberta em relação à lei de controle. Embora a haste receba a mesma força de atuação gerada pelo PID para corrigir o ângulo, a variável de posição não é realimentada para o cálculo do erro. Conseqüentemente, a ação do controlador é orientada estritamente pela estabilização angular, fazendo com que o deslocamento linear evolua como uma consequência não regulada da dinâmica do sistema.

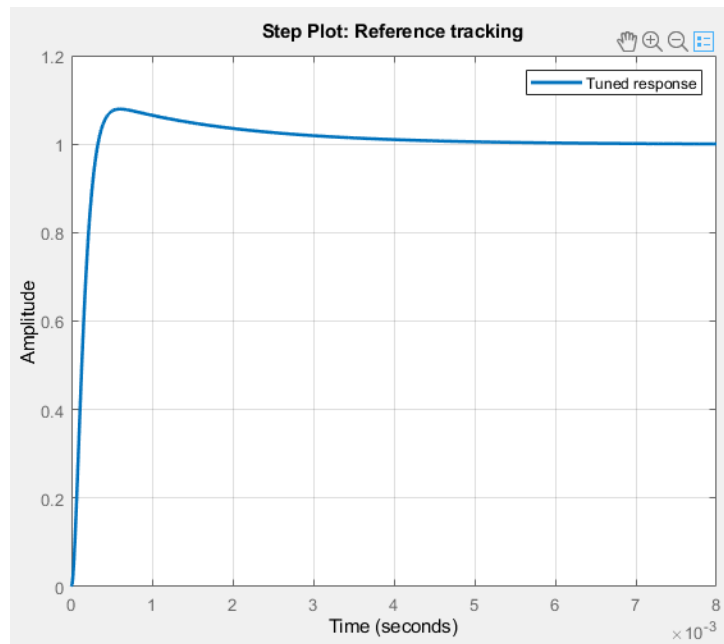
4.1.1 Resposta ao Degrau Unitário

As simulações iniciais focaram na estabilização do sistema atuando exclusivamente sobre o erro angular. A [Figura 18](#) apresenta a resposta temporal obtida com uma sintonização que prioriza a estabilidade da variável θ .

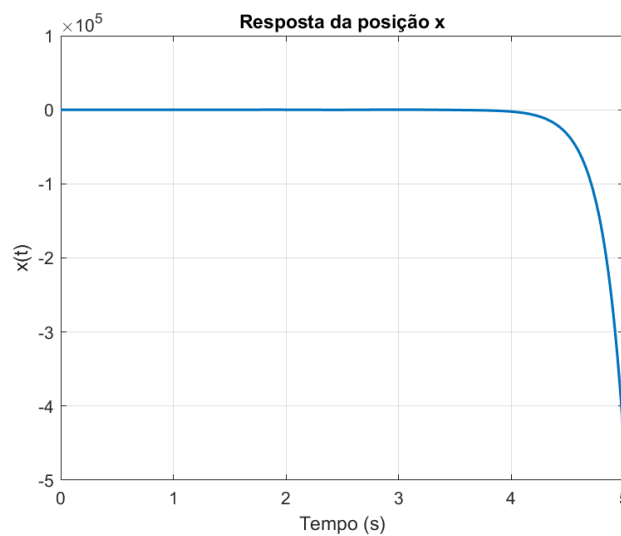
Conforme observado na [Figura 18](#), embora o ângulo tenda ao equilíbrio, os ganhos exigidos para essa estabilização geram sinais de controle com amplitudes excessivas, incompatíveis com as restrições físicas de atuadores reais.

Adicionalmente, fica evidente uma limitação estrutural dessa configuração: devido à ausência de realimentação da variável de posição x , a haste tende a acelerar continuamente ao tentar compensar pequenas inclinações do tronco. Esse comportamento de *drift* (deriva) na posição, ilustrado na [Figura 19](#), demonstra que o controlador PID isolado é insuficiente para garantir a estabilização completa do modelo H2AT.

Figura 18 – Resposta do sistema com ganhos de alta magnitude.



Fonte: Autora.

Figura 19 – Resposta ao degrau da variável x .

Fonte: Autora.

4.1.2 Cenário com Atraso

Para a validação deste cenário utilizando a representação em função de transferência, o atraso de transporte foi modelado matematicamente utilizando a Aproximação de Padé de primeira ordem:

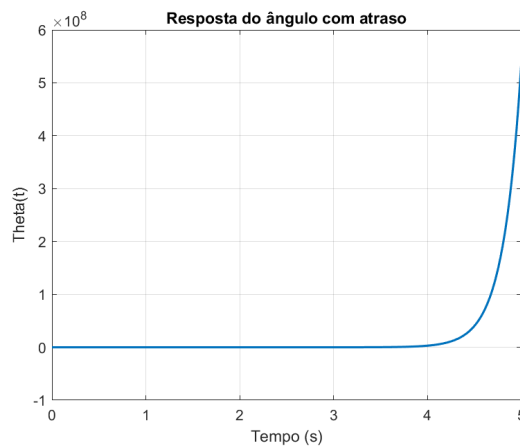
$$e^{-\tau s} \approx P_{pade}(s) = \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} \quad (4.1)$$

Considerando o atraso $\tau = 0,05$ s, a função aproximada foi multiplicada em série pelas funções de transferência originais $G_X(s)$ e $G_\Theta(s)$, resultando em uma nova planta aumentada dada por:

$$\begin{aligned} G_{X_atraso}(s) &= G_X(s) \cdot P_{pade}(s) \\ G_{\Theta_atraso}(s) &= G_\Theta(s) \cdot P_{pade}(s) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Estas novas funções de transferência foram implementadas no bloco da planta no Simulink. A Figura 20 apresenta a resposta do controlador PID (projetado originalmente para a planta nominal) quando submetido a esta dinâmica alterada.

Figura 20 – Resposta ao degrau do ângulo θ com atraso por Padé.



Fonte: Autora.

Esse resultado reforça a fragilidade estrutural da solução PID para este sistema. A instabilidade, combinada com o efeito do atraso, já era, de certa forma, previsível, considerando o desempenho limite observado no cenário nominal. O resultado confirma que a abordagem clássica SISO (Single-Input Single-Output) é insuficiente para assegurar a estabilidade ampla do modelo H2AT. A dificuldade em lidar com o acoplamento entre as variáveis x e θ , somada à baixa resistência ao atraso, evidencia a necessidade de uma estratégia multivariável robusta, justificando a implementação do controlador LQR apresentada na seção seguinte.

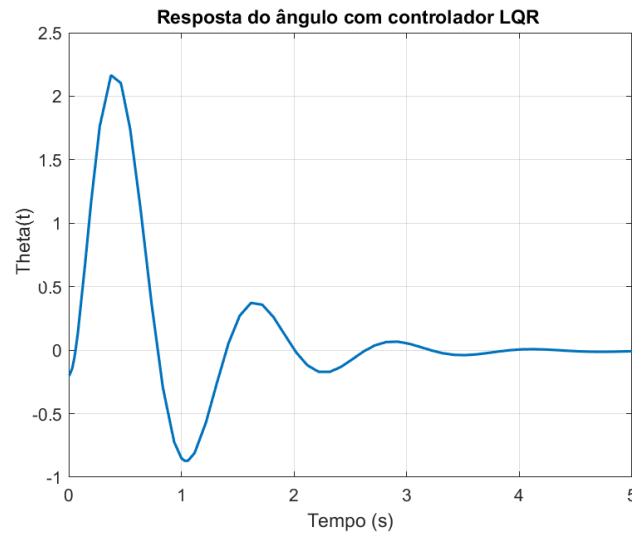
4.2 Desempenho do Controlador LQR

Em contraste com a abordagem clássica (PID), a validação do Regulador Linear Quadrático (LQR) concentrou-se na capacidade de regulação de estados. O objetivo central desta etapa foi verificar se a lei de controle ótima, projetada com ênfase no amortecimento (maior penalidade sobre as velocidades na matriz Q) e restrição de esforço ($R = 10$), é capaz de recuperar o equilíbrio do sistema de forma autônoma e robusta, garantindo o retorno à posição vertical sem saturar os atuadores.

4.2.1 Resposta à Condição Inicial

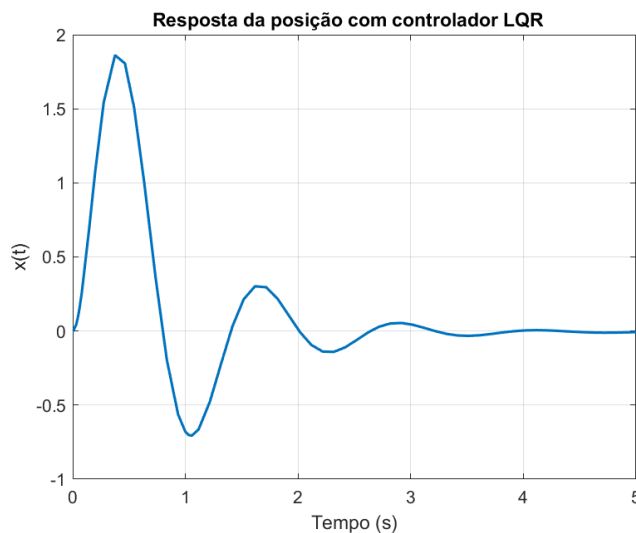
Seguindo a abordagem definida para o LQR, o sistema foi iniciado com uma inclinação de $\theta_0 = -0,2$ rad, simulando um desequilíbrio inicial. A [Figura 21](#) apresenta a trajetória de recuperação do ângulo enquanto a [Figura 22](#) apresenta a trajetória da posição.

Figura 21 – Resposta do ângulo com controlador LQR.



Fonte: Autora.

Figura 22 – Resposta da posição com controlador LQR.



Fonte: Autora.

É importante notar que, para corrigir um erro angular dessa magnitude sem permitir a queda, o sistema precisou realizar um deslocamento linear (x) significativo. Os valores de posição atingiram amplitudes superiores ao esperado durante o regime transitório, distanciando-se temporariamente do ponto de operação ideal.

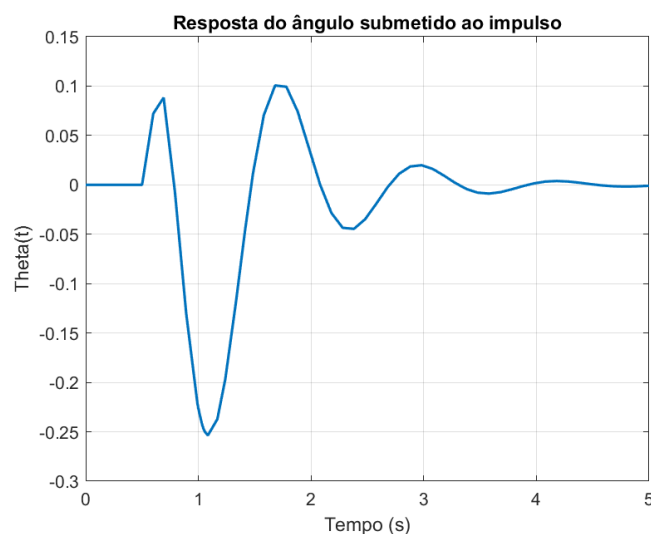
Apesar da variação acentuada da posição x e das velocidades, o resultado evidencia a robustez do controlador projetado. Mesmo partindo de uma condição crítica, o sistema LQR garantiu a estabilidade, conduzindo todas as variáveis de estado de volta a zero (o ponto de equilíbrio ideal) e mantendo o modelo H2AT estável ao final da manobra.

4.2.2 Rejeição de Perturbações

Após demonstrar a recuperação de desvios iniciais, realizou-se uma validação complementar partindo do estado nulo ($\mathbf{x}_0 = [0; 0; 0; 0]^T$), porém submetendo o sistema a uma perturbação externa. Neste cenário, aplicou-se um sinal de entrada do tipo impulso unitário na força $F(t)$ no instante $t = 0$.

O objetivo deste teste é verificar a capacidade de rejeição de distúrbios do controlador LQR. Fisicamente, essa simulação representa uma situação em que o indivíduo, estando parado e em equilíbrio, sofre um impacto súbito, como um empurrão ou um espasmo muscular involuntário. A [Figura 23](#) apresenta a resposta dinâmica do estado θ e a [Figura 23](#) a resposta do estado x .

Figura 23 – Resposta do ângulo à entrada de impulso.



Fonte: Autora.

Conforme observado, o sistema parte do repouso e sofre um desvio instantâneo devido à energia cinética introduzida pelo impulso. No entanto, o controlador atua prontamente para dissipar essa energia. É possível notar que a base (x) realiza um movimento compensatório rápido para absorver o impacto e impedir a queda do tronco (θ).

O aspecto fundamental deste resultado é que, após o regime transitório causado pela perturbação, o controlador consegue trazer ambas as variáveis de volta à origem (zero). Isso comprova que a estratégia LQR confere ao sistema robustez para rejeitar perturbações

Figura 24 – Resposta da posição à entrada de impulso.



Fonte: Autora.

externas, garantindo que o modelo H2AT retorne à estabilidade postural mesmo após sofrer interações bruscas com o ambiente.

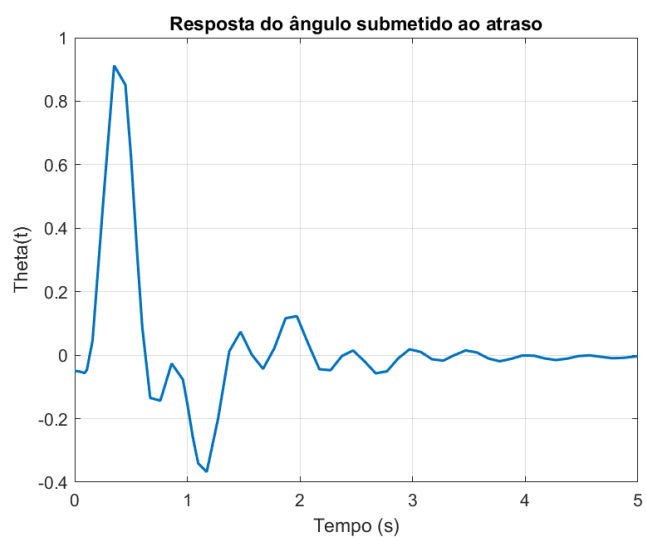
4.2.3 Cenário com Atraso

Nesta etapa final de validação, o controlador LQR foi submetido ao cenário mais crítico de operação: a recuperação do equilíbrio a partir da inclinação inicial de $\theta_0 = -0,2$ rad, porém com a inserção de um atraso de transporte de $\tau = 0,05$ s na malha de realimentação.

O objetivo foi verificar se as margens de estabilidade fornecidas pelos ganhos ótimos K seriam suficientes para suportar a redução de fase introduzida pelo atraso temporal. A [Figura 25](#) e [Figura 26](#) apresenta a resposta temporal dos estados sob essa condição.

A análise do gráfico revela que o sistema LQR foi capaz de manter a estabilidade global, convergindo os estados para a origem mesmo na presença do atraso. Comparando este resultado com o cenário nominal, nota-se uma leve degradação no desempenho transitório. Esse comportamento é fisicamente esperado, visto que o controlador atua com base em informações passadas, reagindo com um ligeiro atraso às perturbações.

Contudo, o resultado mais expressivo é o contraste com o controlador PID. Enquanto a abordagem clássica levou o sistema à instabilidade imediata sob a mesma condição, o regulador LQR demonstrou robustez suficiente para absorver o atraso. Isso valida a aplicabilidade desta estratégia para o modelo biomecânico H2AT, confirmando que o sistema de controle seria capaz de lidar com os atrasos inerentes à transmissão neural ou ao acionamento de atuadores em uma aplicação real.

Figura 25 – Resposta do LQR com atraso de transporte para θ .

Fonte: Autora.

Figura 26 – Resposta do LQR com atraso de transporte para x .

Fonte: Autora.

5 Considerações Finais

O presente trabalho investigou estratégias de controle aplicadas à estabilização do tronco de indivíduos com lesão medular, utilizando o modelo biomecânico H2AT. A motivação central foi contribuir para soluções que ampliem a autonomia e a segurança de usuários com comprometimento motor, avaliando o potencial de controladores modernos nessa aplicação.

A comparação entre os métodos analisados evidenciou que o controlador PID, embora simples e amplamente difundido, não atende às exigências dinâmicas do modelo. A abordagem SISO mostrou-se limitada para lidar com o acoplamento entre ângulo e posição, resultando em esforços de controle elevados e deslocamentos indesejados, tornando sua utilização inviável em um cenário real.

Por outro lado, o controlador LQR apresentou desempenho claramente superior. Ao utilizar todos os estados na realimentação, foi capaz de estabilizar simultaneamente o ângulo e a posição, mesmo diante de grandes perturbações iniciais. Além disso, manteve o esforço de controle dentro de limites fisicamente plausíveis e demonstrou robustez frente ao atraso temporal introduzido nas simulações.

Os resultados alcançados indicam que a estratégia avaliada tem potencial para aplicação em tecnologias assistivas, incluindo sistemas de Estimulação Elétrica Funcional, exoesqueletos de tronco e cadeiras de rodas robóticas, contribuindo para melhorar estabilidade, segurança e conforto do usuário.

Por fim, o estudo abre caminho para futuras investigações, como testes experimentais em protótipos, incorporação de técnicas adaptativas ou inteligentes e a expansão da modelagem para ambientes tridimensionais. Esses avanços podem ampliar ainda mais a aplicabilidade do método e fortalecer sua contribuição para a engenharia de reabilitação.

Referências

- BLANDEAU, M. et al. Unknown input observer for understanding sitting control of persons with spine cord injury. *IFAC-PapersOnLine*, Elsevier, v. 49, n. 5, p. 175–181, 2016. Citado 3 vezes nas páginas [13](#), [21](#) e [27](#).
- CHACKO, S. J.; NEERAJ, P. C.; ABRAHAM, R. J. Optimizing lqr controllers: A comparative study. *Results in Control and Optimization*, Elsevier B.V., v. 14, 3 2024. ISSN 26667207. Citado na página [24](#).
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos: Teoria, Ensaio Práticos e Exercícios*. São Paulo: Blucher, 2011. ISBN 978-85-212-0590-6. Citado 2 vezes nas páginas [20](#) e [22](#).
- KĘDZIOREK, J.; BŁAŻKIEWICZ, M. Nonlinear measures to evaluate upright postural stability: A systematic review. *Entropy*, MDPI, v. 22, n. 12, p. 1357, 2020. Citado na página [15](#).
- KLUEVER, C. A. *Sistemas Dinâmicos: Modelagem, Simulação e Controle*. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2018. Tradução de: *Dynamic Systems: Modeling, Simulation, and Control, First Edition*. Tradução de Mauro Speranza Neto. ISBN 978-85-216-3458-4. Citado 3 vezes nas páginas [16](#), [17](#) e [26](#).
- LACERDA, J. P. R. et al. Eficácia das terapias de reabilitação em pacientes com lesão medular: Uma revisão integrativa. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educacao, v. 10, p. 594–604, 8 2024. Citado na página [13](#).
- MASTI, D.; ZANON, M.; BEMPORAD, A. Tuning lqr controllers: A sensitivity-based approach. *IEEE Control Systems Letters*, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc., v. 6, p. 932–937, 2022. ISSN 24751456. Citado na página [24](#).
- MIGUEL, L. F. F.; ELIAS, S.; BECK, A. T. Reliability-based optimization of supported pendulum tmds' nonlinear track shape using padé approximants. *Engineering Structures*, Elsevier Ltd, v. 306, 5 2024. ISSN 18737323. Citado na página [37](#).
- NASCIMENTO, T. N.; BOFFINO, C. C. Case report: Galvanic vestibular stimulation in the chronic spinal cord injury patient. *Frontiers in Rehabilitation Sciences*, Frontiers Media SA, v. 3, 2022. ISSN 26736861. Citado na página [13](#).
- NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. Tradução de: *Control Systems Engineering, 6th ed.*. Tradução de Jackson Paul Matsuura. ISBN 978-85-216-2136-2. Citado na página [19](#).
- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. Tradução de: *Modern Control Engineering*. Tradução de Heloísa Coimbra de Souza. Revisão técnica de Eduardo Aoun Tannuri. 5^a reimpressão em julho de 2014. ISBN 978-85-4301-375-6. Citado 6 vezes nas páginas [16](#), [18](#), [22](#), [23](#), [24](#) e [25](#).

SHUPRAJHAA, T.; SUJIT, S. K.; SRINIVASAN, K. Reinforcement learning based adaptive pid controller design for control of linear/nonlinear unstable processes. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 128, p. 109450, 2022. Citado na página [22](#).

SILVA, H. F. da et al. Aplicabilidade da tecnologia assistiva para pessoas com lesão medular: Uma revisão integrativa. *Research, Society and Development*, Research, Society and Development, v. 10, p. e0210815387, 7 2021. Citado na página [13](#).