UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS
ESCOLA NORMAL SUPERIOR
LICENCIATURA EM MATEMATICA

ALUNO: JULIANO CÉSAR PEREIRA DA MATA

FRAÇÕES PARCIAIS: MÉTODOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES

MANAUS, FEVEREIRO
2024

ALUNO(A): JULIANO CÉSAR PEREIRA DA MATA

FRAÇÕES PARCIAIS: MÉTODOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão do Curso elaborado junto às disciplinas de TCC I e TCC II do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Amazonas para obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Alessandro Monteiro de Menezes

MANAUS, FEVEREIRO

2024

TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

Ata de Defesa do Trabalho de Conclusão de Curso em Licenciatura em Matemática da Escola Normal Superior-UEA de JULIANO CÉSAR PEREIRA DA MATA.

Em 6 de fevereiro de 2024, às 16 horas, na Sala Maria Clara Dantas da Escola Normal Superior da UEA na presença da Banca Avaliadora composta pelos professores: Me. Alessandro Monteiro de Menezes, Me. Alexandra Salerno Pinheiro e Dr. Almir Cunha da Graça Neto, o aluno JULIANO CÉSAR PEREIRA DA MATA apresentou o Trabalho de Conclusão do Curso intitulado: "FRAÇÕES PARCIAIS: MÉTODOS ELEMENTARES E APLICAÇÕES". A Banca Examinadora deliberou e decidiu pela APROVAÇÃO do referido trabalho, com o conceito 9,3 divulgando o resultado ao aluno e demais presentes.

Manaus, 6 de fevereiro de 2024.

Presidente da Banca Avaliadora

Orientador

Avaliador 1

Almir Neto

Avaliador 2

Juliano César P. da M.

Aluno

RESUMO

Essa pesquisa delimita – se ao estudo das frações parciais. O principal objetivo deste trabalho é apresentar os casos de decomposições e seus métodos de resoluções, aplicando em questões de concursos e vestibulares a nível fundamental, médio e superior.

Para isso foi necessário abordar alguns conceitos elementares tais como frações e suas classificações, polinômios e suas operações, frações racionais próprias e impróprias e resolução de sistemas lineares. Com base nessas definições, foram desenvolvidos três métodos de resoluções, são eles: O método igualando os coeficientes que abrange todos os casos de decomposição, o método de Heaviside, e a transformada de Laplace.

Palavras – Chave: Frações Parciais; Decomposição; Métodos de resolução; Aplicações.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças, sabedoria e resiliência para concluir esse trabalho e me fez entender que tudo tem seu tempo.

A minha mãe, Ana Cristina Pereira da Silva, que, sempre depositou a mim todas as oportunidades acadêmicas que não teve na infância, tornando se crucial o meu despertar para os estudos.

A minha esposa, Giovanna Abensur de Carvalho, por ter aparecido na minha vida, concluímos juntos o ensino fundamental II, o ensino médio e agora a graduação, obrigado pelo companheirismo ao longo desses 10 anos juntos.

Ao meu orientador, Me. Alessandro Monteiro de Menezes, por ter acreditado no meu potencial, mesmo com as adversidades sempre me incentivou, agradeço a paciência, e pela forma que me conduziu, na graduação, nas disciplinas: Matemática Elementar 2018 e Cálculo I em 2019, que em especial foi a matéria que me fez crescer academicamente.

A professora, Me. Helisângela Ramos da Costa, que sempre me motivou através das minhas limitações, agradeço pelas mensagens de cobrança quanto aos prazos de entrega dos relatórios, de TCC e sempre de maneira educada me guiando, e me ajudando da melhor maneira possível.

A todos aos meus professores da graduação, foram períodos de muita aprendizagem, o tempo me fez entender que cada um tem a sua personalidade, seu jeito de ministrar aula e levarei comigo as melhores virtudes de cada um.

Ao professor Me. Carlos Ronaldo Cardoso de Carvalho, que através das suas aulas e sua maestria de ensinar me despertou e me motivou o interesse de cursar licenciatura em matemática.

A professora Dr.

E por fim, mas não menos importante, todas os colegas da graduação que fiz ao longo desses anos.

NOTAÇÕES E ABREVIAÇÕES

I. ABREVIAÇÕES

AFA	Academia de Força Aérea
CEFET – MG	Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
CMM	Colégio Militar de Manaus
EN	Escola Naval
FATEC – SP	Faculdade de Tecnologia do Estado de São Paulo
FUVEST – SP	Fundação Universitária para o Vestibular de São Paulo
IF – PI	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí
IF – MT	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Mato Grosso
ITA	Instituto Tecnológico da Aeronáutica
MACK – SP	Mackenzie São Paulo
UFAM	Universidade Federal do Amazonas
UNIFOR - CE	Universidade de Fortaleza
U.C. – MG	Universidade Católica de Minas Gerais
U.F.S CAR- SP	Universidade Federal de São Carlos – São Paulo.
UNIFESP	Universidade Federal de São Paulo

II. NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$ Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$ Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{Q}$ Conjunto dos Números Racionais

$\mathbb{R}$ Conjunto dos Números Reais

$=$ Igual

$\neq$ Diferente

$>$ Maior que

$<$ Menor que

$\geq$ Maior ou igual que

$\leq$ Menor ou igual que

$\therefore$ Portanto

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As frações parciais é uma ferramenta importantíssima na solução de problemas tais como: Decomposição de frações normalmente para encontrar coeficientes, Integração de funções racionais, transformadas inversas de Laplace, na solução de equações lineares entre outros.

As frações parciais surgem com uma abordagem superficial nas escolas, normalmente esse assunto é abordado no 9ªano do ensino fundamental II e no último ano do ensino médio, é apresentada apenas como uma fórmula de resolução de problemas, que não se adapta a todas as questões e são raras as abordagens que envolvem a parte da construção e associação do conteúdo.

Observou - se que as questões apresentadas nos livros didáticos não são bem exploradas, com isso a dificulta o aprendizado nesse conteúdo que é de extrema importância para aqueles que querem seguir a área de exatas, e aqueles que pretendem realizar vestibulares e concursos.

Muitas vezes, a falta de literatura a respeito das frações parciais dificulta no processo de ensino a aprendizagem no assunto, diante de tais pontos, este trabalho apresenta um breve recorte do conteúdo referente as frações parciais e suas aplicações, buscando na medida do possível apresentar de forma mais clara o conteúdo, facilitando assim para o leitor.

O trabalho possui três divisões, sendo a primeira referente aos aspectos históricos e os matemáticos que contribuíram para o avanço das frações parciais, a segunda refere sobre a metodologia da pesquisa, a abordagem metodológica e as etapas necessária para a construção desse trabalho, e por fim, a terceira divisão que busca tratar sobre os métodos de resolução das frações parciais e o desenvolvimento de suas aplicações em questões de vestibulares e concursos.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEORICA

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS E PRELIMINARES

As frações surgiram há mais de 3000 anos, no antigo Egito, em decorrência de situações do cotidiano que envolviam medidas.

Uma das principais necessidades para o uso de frações ocorreu devido às enchentes do Rio Nilo, que levavam as marcações das terras à sua margem. Para remarcá-las, usavam – se cordas e registravam – se quantas vezes essa unidade de medida estava contida no terreno. Na sua grande maioria essa medida não era um número inteiro, o que a partir disso fez surgir um novo conceito de número, no caso, número fracionário.

Segundo Boyer (2012), atribuíram a fração 2/3 um papel especial nos processos aritméticos, de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso! Os Egípcios consideravam a fração racional própria geral da forma da forma m/n não como uma "coisa" elementar, mas como farte do processo incompleto. A fração 3/5, para nós uma única fração irredutível, era pensada pelos escribas egípcios como irredutível à soma de três frações unitárias 1/3, 1/5 e 1/15.

No mais extenso papiro egípcio de natureza matemática, conhecido por Papiro Rhind e por vezes, de Papiro Ahmes, em honra ao escriba que o copiou por volta de 1650 A.C, tem-se uma noção de como lidavam com as frações.

Um método dos métodos de resolução que apresentamos neste trabalho foram imaginados e delineados pelo engenheiro eletrônico inglês Oliver **Heaviside** (1850 – 1925), a verdadeira contribuição de Heaviside, e pela qual ele merece crédito, foi por ter mostrado como aplicar o que ele chamou de "Cálculo Operacional" em problemas físicos reais de grande relevância tecnológica. Mais especificamente, uma de suas contribuições foi o "Teorema da Expansão" similar ao que hoje é conhecida como expansão em **frações parciais** para uma função racional, sua formulação e utilização são as provas vivas de seu estilo, já que foi estabelecido sem qualquer prova matemática. Seu peculiar modo de trabalho, que chamava de "matemática experimental" e seu estilo debochado causaram a ele muitos embaraços. Através dessa teoria Heaviside contribuiu para formalizar a teoria eletromagnética de Maxwell que originalmente totalizava 38 equações, em apenas 4 equações fundamentais.

Atualmente, o Teorema da Expansão ainda é uma das bases fundamentais entre os métodos que englobam a transformada de Laplace. Todavia, inovação de Heaviside não reside apenas neste fato e sim, principalmente, por ter usado o Teorema da Expansão, com sucesso, para funções não racionais, principalmente ao defrontar-se com o problema das linhas de transmissão, que desafiava os cientistas da época.

Dentre os responsáveis por estabelecer o rigor faltante ao método de Heaviside está um dos seus grandes admiradores, o engenheiro americano, John Carson. Em seu livro, (Electric Circuit Theory, 1926). Carson toma para si a responsabilidade de continuar o trabalho de Heaviside, introduzindo o formalismo matemático e deduzindo todas as fórmulas que o mentor havia proposto. Foi ele o responsável pela conexão entre o Cálculo Operacional de Heaviside e a integral de Laplace. (TONIDANDEL, 2012).

1.2 FRAÇÕES: (CLASSIFICAÇÃO E SUAS OPERAÇÕES)

Definição 1: [1]Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto das frações do tipo $\frac{p}{q}$, com ***p*** e ***q*** números inteiros e $q \neq 0$**.** Onde ***p*** é chamado de numerador e ***q*** de denominador.

Então,

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid \mathrm{p} \in \mathbb{Z}, \mathrm{q} \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\right\}.$$

Este conjunto é conhecido como o conjunto dos números racionais.

Desta definição, decorre que:

i) $\frac{2}{3}$ é fração, onde p = 2 é o numerador e q = 3 o numerador.

ii) $\frac{-5}{6}$ é fração, onde p = -5 é o numerador e q = 6 o numerador.

iii) $\frac{7}{0}$ não é fração, p = 7 é o numerador e q = 0, de acordo com a **Definição 1** o denominador q tem que ser $\neq 0$.

Sendo o numerador p $\in \mathbb{Z}$, e o denominador q $\in \mathbb{Z}$ com $q \neq 0$, então vale as seguintes classificações:

[1] Definição baseada na obra de (IEZZI ,2013)

CLASSIFICAÇÕES DE FRAÇÕES

i) **Fração Própria:** As frações são classificadas como próprias quando o denominador é maior que o numerador, ou seja, q > p.

Exemplos: $\frac{2}{3}, \frac{9}{13}, \frac{4}{7}$

ii) **Fração Imprópria:** As frações são classificadas como impróprias quando o numerador é maior que o denominador, ou seja, p ≥ q.

Exemplos: $\frac{5}{3}, \frac{8}{6}, \frac{9}{7}$

iii) **Frações Aparentes:** Podemos dizer que as frações são aparentes quando *p* e *q* são múltiplos entre si, ou seja, *p* é divisível por *q.*

Exemplos: $\frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \frac{12}{4}$

iv) **Frações Equivalentes:** São aquelas que aparentemente são diferentes, mas que possuem o mesmo resultado.

Exemplos: $\frac{4}{2} = \frac{8}{4}, \frac{6}{3} = \frac{12}{6}$

v) **Frações Irredutíveis:** Podemos dizer que as frações são irredutíveis quando *p* e *q* não possuem divisores comuns, ou seja, *p* não divide *q.* Ou também, quando mdc entre *p e q* é igual a um.

Exemplos: $\frac{4}{7}, \frac{9}{19}, \frac{16}{7}$

Observações:

O1. A fração é classificada como **própria** (i), quando q > p, a divisão $\frac{p}{q}$ resulta um número **menor que um inteiro**.

O2. A fração é classificada como **imprópria** (ii), quando a p ≥ q, a divisão $\frac{p}{q}$ resulta um número **maior que um inteiro**.

O3. A fração é classificada como **aparente** (iii), essa divisão resulta **um número inteiro.**

No conjunto das frações $\mathbb{Q}$, de acordo com a **Definição 1.** São definidas três operações:

Sejam as frações $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ com q e s $\neq 0$, com essas duas frações é possível determinar a soma, subtração e multiplicação, vejamos as operações a seguir:

OP1. Soma: $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + qr}{qs}$

OP2. Subtração: $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} - \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{ps} - \mathrm{qr}}{\mathrm{qs}}$

OP3. Multiplicação: $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}} \times \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{pr}}{\mathrm{qs}}$

No conjunto $\mathbb{Q}^*$ **(conjunto dos números racionais excluindo o número zero)** é definida a operação de divisão.

OP4. Divisão: $\frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}$

Essas operações são fundamentais para utilizarmos no desenvolvimento das frações. No item a seguir abordaremos os polinômios que estão presentes nas frações parciais.

1.3 POLINÔMIOS

Definição 2: [2]Dada a sequência de números complexos $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$, consideremos a função: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. A função f é denominada função polinomial ou polinômio associado à sequência dada. Os números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ são denominados coeficientes e as parcelas $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n$ são chamados termos do polinômio f. Uma função polinomial de um único termo é denominada função monomial ou monômio.

Exemplos:

As seguintes aplicações são polinômios:

- $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 25x^3$, onde $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 3 \; e \; a_3 = 25$.
- $g(x) = 1 + 7x^4$, onde $a_0 = 1, a_1 = a_2 = a_3 = 0 \; e \; a_4 = 7$.
- $h(x) = 5 + 5x^2 + 23x^3$, onde $a_0 = 5, a_1 = 0, a_2 = 5 \; e \; a_3 = 23$.

1.3.1 OPERAÇÕES ENTRE POLINÔMIOS

ADIÇÃO

SOMA DE DOIS POLINÔMIOS

Teorema 1: Dados dois polinômios

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} (a_i x^i)$$

e

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} (b_i x^i)\,.$$

Chama-se soma de A com B o polinômio:

$$(A + B)(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

Isto, é:

[2] As definições desta seção estão de acordo com (MACHADO; 2004).

$$(A+B)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i \quad .$$

Observação: Na soma entre dois ou mais polinômios, somamos os coeficientes dos termos que possuem a mesma parte literal.

Propriedades da soma dos polinômios

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

P 1. Propriedade comutativa $A+B=B+A$

P 2. Propriedade associativa: $(A+B)+C=A+(B+C)$

P 3. Elemento neutro da adição: $A+0=0+A=A$

P 4. Existe o oposto de A, indicado por $-A$, tal que $A+(-A)=0$, devido a **P4**. podemos definir a diferença A – B de dois polinômios $A-B=A+(-B)$, que é abordado no tópico seguinte de **SUBTRAÇÃO DE DOIS POLINÔMIOS.**

Exemplo 1. (GUIDORIZZI – 2014) Sejam os polinômios $A(x)=4+3x+2x^2$ e $B(x)=2+3x^2+x^4$ calcule a soma entre $A(x)\ e\ B(x)$.

Resolução: Utilizando o **Teorema 1**,

Temos:

$$A(x) = 4+3x+x^2+0x^3+0x^4$$

e

$$B(x) = 5+0x+3x^2+0x^3+x^4 \, .$$

Então:

$$(A+B)(x) = (4+5)+(3+0)x+(1+3)x^2+(0+0)x^3+(0+1)x^4$$
$$(A+B)(x) = 9+3x+4x^2+x^4 \, .$$

SUBTRAÇÃO

SUBTRAÇÃO DE DOIS POLINÔMIOS

Teorema 2: Dados dois polinômios

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n\mathrm{x}^n = \sum_{i=0}^{n}\left(a_ix^i\right).$$

e

$$B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_n\mathrm{x}^n = \sum_{i=0}^{n}\left(b_ix^i\right).$$

Chama-se diferença de A com B o polinômio:

$(A - B)(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \cdots + (a_n - b_n)x_n.$

Isto é:

$$\boxed{(A - B)(x) = \sum_{i=0}^{n}(a_i - b_i)x^i}\ .$$

Observação: Na diferença entre dois polinômios, subtraímos os coeficientes dos termos que possuem a mesma parte literal.

Exemplo 2. (GUIDORIZZI – 2014) Sejam os polinômios $A(x) = 4 + 3x + 2x^2$ e $B(x) = 2 + 3x^2 + x^4$. Calcule a diferença entre $A(x)\ e\ B(x)$.

Resolução: A fim de utilizar o **Teorema 2,** seja os polinômios, temos:

$$A(x) = 4 + 3x + x^2 + 0x^3 + 0x^4$$

e

$$B(x) = 2 + 0x + 3x^2 + 0x^3 + x^4$$

Então:

$$(A - B)(x) = (4 - 2) + (3 - 0)x + (1 - 3)x^2 + (0 - 0)x^3 + (0 - 1)x^4$$

$$(A - B)(x) = 2 + 3x - 2x^2 - x^4.$$

MULTIPLICAÇÃO

MULTIPLICAÇÃO DE DOIS POLINÔMIOS

Teorema 3: Dados dois polinômios

$$A(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e

$$B(x) = b_mx^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0\ .$$

Existe um único polinômio P tal que $P(x) = A(x).B(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$.

Este polinômio, que é obtido multiplicando cada termo de A por todos os de B, é:

$$\boxed{P(x) = A(x).B(x) = (a_nb_m)x^{n+m} + (a_nb_{m-1} + a_{n-1}b_m)x^{n+m+1} + \cdots + (a_1b_0 + a_0b_1)x + (a_0b_0)}$$

E o denominamos o produto do polinômio A com B.

Indicamos: $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ ou $\boldsymbol{P} \equiv \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}$ de acordo com a **definição 3**, que veremos no próximo tópico.

Exemplo 3. Multiplique o $A(x) = 2x^2 - x + 3$ por $B(x) = x^5 - x + 1$

Resolução: De acordo com o **teorema 3,** existe um único polinômio P tal que $P(x) = A(x).B(x)$, então:

$$P(x) = A(x).B(x)$$

$$P(x) = 2x^2(x^5 - x + 1) - x(x^5 - x + 1) + 3(x^5 - x + 1)$$

$$P(x) = 2x^7 - 2x^3 + 2x^2 - x^6 + x^2 - x + 3x^5 - 3x + 3$$

$$P(x) = 2x^7 - x^6 + 3x^5 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$$

Observemos que, é possível realizarmos a multiplicação entre dois polinômios.

Propriedades da multiplicação dos polinômios

Decorrem da definição as seguintes propriedades:

P 5. Propriedade comutativa $A.B \equiv B.A$

P 6. Propriedade associativa $(A.B).C \equiv A.(B.C)$

P 7. Distributiva $A(B + C) \equiv AB + AC$

Observações quanto ao grau dos polinômios na multiplicação

O1. Dados dois polinômios A e B, se um deles for identicamente nulo, então o produto de A.B também será nulo. Reciprocamente, a condição para que o produto A.B seja nulo é que pelo menos um dos polinômios, A ou B, seja nulo:

$$\boxed{A.B \equiv 0 \Leftrightarrow A \equiv 0 \; ou \; B \equiv 0}\,.$$

O2. Caso o produto AB não seja nulo**,** verificamos que o grau de AB é igual a soma dos graus de A e B

$$\boxed{gr(A.B) = gr(A) + gr(B)}\,.$$

Exemplo 4. Sejam dois polinômios A sendo $gr(A) = 2$, e o polinômio B e $gr(B) = 5$, multiplicando esses polinômios o grau resultante, de acordo com **O2**, temos que:

$$gr(A.B) = gr(A) + gr(B)$$

$$gr(A.B) = 2 + 5$$

$$gr(A.B) = 7\,.$$

DIVISÃO

DIVISÃO DE DOIS POLINÔMIOS

Definição: Dados dois polinômios $A(x)$ e $B(x)$, sendo B um polinômio não nulo, existe um único par de polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ que satisfazem as seguintes condições:

Condição 1: $A(x) \equiv B(x).Q(x) + R(x)$

Os polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ são chamados, respectivamente, quociente e resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$; $A(x)$ é o dividendo e $B(x)$ é o divisor.

Condição 2: $gr(R) < gr(B)\ ou\ R(x) \equiv 0$

Quando $R(x) \equiv 0$, dizemos que $A(x)$ é divisível por $B(x)$, ou que a divisão é exata. Dividir o polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$ significa determinar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$.

Observações quanto ao grau dos polinômios na divisão

O3. Numa divisão, o grau do resto $gr(R)$ é sempre menor que o grau do divisor (ou o resto é nulo). O grau do quociente $Q(x)$, quando $Q(x)$ não é nulo, pode ser determinado observando a identidade da **Condição 1. De acordo com O2** o $gr(BQ) = gr(B) + gr(Q)$ e conforme a **Condição 2** $gr(R) < gr(B)$, temos que $gr(BQ + R) = gr(B) + gr(Q)$. Portanto, devemos ter que $gr(A) = gr(B) + gr(Q)$, ou seja, $gr(Q) = gr(A) - gr(B)$.

Como $gr(Q) \geq 0$, esta relação se verifica quando $gr(A) \geq gr(B)$

Em resumo, quando dividimos o polinômio $A(x)$ pelo polinômio $B(x)$, não nulo temos:

Se $gr(A) < gr(B)$, então $Q(x) \equiv 0$ e $R(x) \equiv A(x)$
Se $gr(A) \geq gr(B)$, então $gr(Q) = gr(A) - gr(B)$
e $gr(R) < gr(B)$ ou $R(x) \equiv 0$

Quando $A(x) \equiv 0$, temos também $Q(x) \equiv 0$ e $R(x) \equiv 0$.

Exemplo 5. Dividir o polinômio $A(x) = 2x + 5$ pelo $B(x) = x^2 + 3x + 1$.

Resolução: Observemos que $gr(A) = 1$ e $gr(B) = 2$. Como $gr(A) < gr(B)$, de acordo com a **O3.** Temos que $Q(x) \equiv 0$ e $R(x) \equiv A(x)$; logo, $Q(x) = 0$ e $R(x) = 2x + 5$

Exemplo 6. Dividir o polinômio $A(x) = 2x^2 + 7x + 6$ pelo $B(x) = x^2 + 2x + 3$.

Resolução: Observemos que $gr(A) = 2$ e $gr(B) = 2$. Então, de acordo com a **O3.** Temos que $gr(A) \geq gr(B)$, logo $gr(Q) = gr(A) - gr(B)$, o grau do quociente será a diferença entre o grau do polinômio $A(x) - B(x)$, sendo assim $gr(Q) = 2 - 2 = 0 \Longrightarrow Q(x) = a \in \mathbb{C}$

De acordo com a **Condição 2** $gr(R) < gr(B) \therefore gr(R) < 2 \Longrightarrow R(x) = bx + c$. Logo, de acordo com a **Condição 1**, temos:

$$A(x) \equiv B(x). Q(x) + R(x)$$

Substituindo $A = 2x^2 + 7x + 6$ e $B(x) = x^2 + 2x + 3$, resulta:

$$2x^2 + 7x + 6 \equiv (x^2 + 2x + 3). a + bx + c$$

$$2x^2 + 7x + 6 \equiv ax^2 + (2a + b)x + (3a + c)$$

Pela igualdade de polinômios, **item 1.3.2**, forma-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 7 \\ 3a + c = 6 \end{cases}$$

Como o já sabemos o valor de a, substituindo nas outras equações que encontramos $b = 3$ e $c = 0$. Logo, $Q(x) = 2$ e $R(x) = 3x$.

1.3.2 IGUALDADE DE POLINÔMIOS

Definição 3: Dizemos que dois polinômios A e B são iguais (ou idênticos) quando os valores numéricos de A e de B são iguais para todo o valor da variável. Nesse caso indicamos a igualdade, pela seguinte representação

$$A \equiv B.$$

Essa sentença, $A \equiv B$, é chamada de identidade.

Então, temos que:

$$A \equiv B \Leftrightarrow A(x) = B(x), \forall x \in \mathbb{C}$$

Teorema 4: Dados dois polinômios $A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $B(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, como podemos reconhecer que são polinômios idênticos?

Observemos que, de acordo com a **Definição 3**, se $A(x) \equiv B(x)$ para todo de x, então decorre:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \ a_2x^2 + a_1x + a_0 = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \ b_2x^2 + b_1x + b_0, \forall x \ \in \mathbb{C}$$

Portanto o polinômio do primeiro membro dessa última igualdade deve ser identicamente nulo, o que ocorre para

$$a_n - b_n = 0,\ a_{n-1} - b_{n-1} = 0, \ldots\ , a_2 - b_2 = 0, \ldots, a_1 - b_1 = 0\ e\ a_0 - b_0 = 0$$

Podemos concluir então que:

$$\boxed{A \equiv B \Leftrightarrow (a_n = b_n,\ a_{n-1} = \ b_{n-1}, \ldots., a_2 = b_2\ , a_1 = b_1\ e\ a_0 = b_0)}$$

Isto é, polinômios idênticos possuem os coeficientes respectivamente iguais.

Exemplo 7. Sabendo – se que $A(x) = x^3 - 3x^2 + ax + b\ \ e\ B(x) = mx^3 + px^2 + 2x - 1$, são idênticos encontre os valores de m, p, a e b.

Resolução: Utilizando o **teorema 4**, temos:

$$A \equiv B \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = m \\ -3 = p \\ a = 2 \\ b = \ -1\ . \end{cases}$$

Logo, o polinômio $A(x) = B(x) = \ x^3 - 3x^2 + 2x - 1$.

POLINÔMIOS IRREDUTIVEIS

Definição 5: Um polinômio $p(x)$, não constante, é dito redutível se existem outros polinômios $f(x)$ e $g(x)$, não constantes, tais que $p(x) = f(x)\ .\ g(x)$. Caso contrário, $p(x)$ é chamado de **irredutível,** ou seja, $p(x)$ não pode ser escrito na forma $p(x) = f(x)\ .\ g(x)$ com $f(x)$ e $g(x)$ não constantes. Então, podemos concluir que, polinômio irredutível é aquele que não conseguimos fatorar, ou seja, escrever na forma de multiplicação.

Esta definição decorre nos exemplos abaixo.

Exemplo 8. $p(x) = x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, como o polinômio $p(x)$ pode ser escrito na forma $f(x)\ .\ g(x)$ temos que $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x - 1$ de acordo com a **definição 5**, esse polinômio é redutível.

Exemplo 9. $f(x) = x - 2$, como o polinômio $f(x)$ não pode ser escrito na forma $f(x) \, . \, g(x)$ de acordo com a **definição 5**, esse polinômio é irredutível.

1.4 FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Definição 6: [3]São denominadas frações algébricas expressões na forma de frações bem como seu numerador e denominador são expressões algébricas. É importante destacar que existe apenas uma única restrição do denominador ser diferente de zero. Seguem os exemplos abaixo:

Esta definição decorre que:

Exemplos:

- $\frac{a}{b+1}$ é fração algébrica, o numerador é a e o denominador $b + 1$, com $b \neq -1$
- $\frac{x+1}{y}$ é fração algébrica, o numerador é $x + 1$ e o denominador y, com $y \neq 0$
- $\frac{a}{0}$ Não é fração algébrica. o numerador é: a e o denominador é 0, de acordo com a **Definição 5** o denominador tem que ser diferente de 0.

ADIÇÃO DE FRAÇÕES ALGEBRICAS

Definição 7: Operamos as frações algébricas, exatamente da mesma maneira como operamos as frações numéricas. Vejamos abaixo, alguns exemplos de soma entre frações algébricas com o mesmo denominador e diferente denominador, o análogo acontece para a **subtração.**

[3] As definições de 6 a 15 desta seção estão de acordo com (BIANCHINNI, 1998)

SOMA COM DENOMINADORES IGUAIS

Definição 8: Nesse caso devemos apenas somar e subtrair os numeradores e repetiremos o denominador.

Exemplo 10: Efetue $\frac{x}{x-3} + \frac{x-1}{x-3}$.

Resolução: A fim de ilustrar a **Definição 8**, temos:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x-1}{x-3} = \frac{x+x-1}{x-3}\ .$$

Logo,

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x-1}{x-3} = \frac{2x-1}{x-3}\ .$$

A seguir vejamos um exemplo com os denominadores diferentes.

SOMA COM DENOMINADORES DIFERENTES

Definição 9: Tiramos o m.m.c. dos denominadores, reduzindo as frações ao mesmo denominador; efetuando-se as operações indicadas no numerador e simplificando, se possível a fração resultante.

Exemplo 11: Efetue $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1}$.

Resolução: Primeiramente, observamos os denominadores das frações e percebemos que na primeira fração algébrica o denominador $x^2 - 1$, de acordo com a **Definição 5,** $x^2 - 1$ pode ser escrito na forma $f(x)\ .\ g(x)$, logo $x^2 - 1$ é um **polinômio redutível**, pode ser escrito como $(x + 1)(x - 1)$, e o denominador da segunda fração é irredutível. Reescrevendo a soma, temos:

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-1}{x+1}\ .$$

Os fatores que compõe o m.m.c são: $(x + 1)(x - 1)$ e $(x + 1)$, o m.m.c será o fator comum e não comum com seus maiores expoentes, ou seja, o m.m.c nesse caso será $(x + 1)(x - 1)$.

Logo,

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x+(x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\ .$$

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x+x^2-2x+1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)}$$

Portanto,

$$\boxed{\frac{2x}{(x+1)(x-1)} + \frac{x-1}{x+1} = \frac{x^2+1}{x^2-1}}\ .$$

Através da definição a seguir, exemplificaremos a multiplicação entre frações algébricas.

MULTIPLICAÇÃO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Definição 10: Multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador, assim como **Multiplicação** de frações abordado no **item 1.2**.

Exemplo 11: Efetue $\frac{3x^2}{2x+4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{2x}$.

Resolução: De acordo com a **Definição 10** deste item**,** temos:

$$\frac{3x^2}{2x+4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{2x} = \frac{3x^2(x^2+4x+4)}{(2x+4)2x}\ .$$

No desenvolvimento das multiplicações algébricas utilizamos também como fundamentação o **Teorema 3:**

$$\boxed{\frac{3x^2}{2x+4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{2x} = \frac{3x^4+12x^3+12x^2}{4x^2+8x}}\ .$$

DIVISÃO DE FRAÇÕES ALGÉBRICAS

Definição 11: Para realizarmos a divisão entre frações algébricas, conservamos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda, assim como **Divisão** de frações abordado no **item 1.2**.

Exemplo 12: Efetue $\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2}$ **,** com $x \neq y$.

Resolução: Na divisão de frações algébricas assim como na divisão de frações, também abordado no **item 1.2** desta fundamentação. A primeira fração sempre será a que está localizada na esquerda e segunda fração a direita, logo:

De acordo com a **Definição 11** deste item**,** temos:

$$\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)^2}{x-y} \cdot \frac{(x-y)^2}{x+y}$$

$$\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)(x+y)}{x-y} \cdot \frac{(x-y)(x-y)}{x+y}$$

Após realizar **Definição 11,** se deparamos novamente com a multiplicação de frações algébricas recorrendo a **Definição 10,** resulta em:

$$\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2} = \frac{(x+y)(x+y)(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)}$$

Simplificando,

$$\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2} = \frac{\cancel{(x+y)}(x+y)\cancel{(x-y)}(x-y)}{\cancel{(x-y)}\cancel{(x+y)}}$$

$$\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2} = (x+y)(x-y)$$

Assim,

$$\boxed{\frac{(x+y)^2}{x-y} : \frac{x+y}{(x-y)^2} = x^2 - y^2} \; .$$

Concluímos que, resolvendo o **exemplo 12** de acordo com a **definição 11,** o exemplo resulta a expressão $x^2 - y^2$ como já abordado anteriormente esse polinômio se enquadra dentro da **Definição 5,** logo ele é considerado como um polinômio redutível.

1.5 FUNÇÕES RACIONAIS

Definição 12: São denominadas funções racionais, o quociente de dois polinômios.

$$F(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

Onde $N(x)$ e $D(x)$ são polinômios e $D(x)$ não nulo.

Esta definição decorre que:

Exemplos:

- $\frac{5}{x-2}$ é função racional, o numerador é: 5 de polinômio de grau zero e o denominador é: $x - 2$. De acordo com a Definição **12** o quociente tem que ser polinômio.
- $\frac{x^3-7}{x^2-2}$ é função racional, o numerador é: $x^3 - 7$ e o denominador é:$x^2 - 2$. Tanto o numerador quando o denominador são polinômios.

FUNÇÕES RACIONAIS PRÓPRIAS

Definição 13: Uma função racional é dita própria se o grau polinômio do seu numerador **é menor** que o grau do polinômio de seu denominador.

De acordo com a definição acima,

Exemplos:

- $\frac{4x-1}{x^3+x+2}$ é função racional própria, o $gr(N) = 1$ e $gr(D) = 3$. Como $gr(N) < gr(D)$ satisfaz a definição.

- $\frac{3x^2+4x-1}{x^2+x+2}$ Não é função racional própria, o $gr(N) = 2$ e $gr(D) = 2$. Como $gr(N) = gr(D)$. De acordo com **Definição 13,** o grau do numerador tem que ser menor que denominador.

A partir desse segundo exemplo, surge a necessidade de uma definição quando não ocorre a condição quando o grau do numerador **é menor** que o grau do polinômio de seu denominador. Vejamos a seguir.

FUNÇÕES RACIONAIS IMPRÓPRIAS

Definição 14: Uma função racional é dita imprópria se o grau do seu numerador é **maior ou igual** que o grau de seu denominador, então:

Se $gr(N) > gr(D)$ ou $gr(N) = gr(D)$.

De acordo com a definição acima,

Exemplos:

- $\frac{3x^2+4x-1}{x^2+x+2}$ é função racional imprópria, o $gr(N) = 2$ e $gr(D) = 2$. Temos $gr(N) = gr(D)$.
- $\frac{x^3+4x-1}{x^2+2x+1}$ é função racional imprópria, o $gr(N) = 3$ e $gr(D) = 2$. Temos $gr(N) > gr(D)$.
- $\frac{4x-1}{x^3+x+2}$ não é função racional imprópria, o $gr(N) = 1$ e $gr(D) = 3$. De acordo com a **Definição 14** o grau do numerador tem que ser maior.

Observação das funções racionais impróprias

O4. Sempre podemos expressar uma função racional imprópria como uma soma de um polinômio com uma função racional própria *(preservando – se o denominador da função imprópria);*

Sabendo que $N(x)$ e $D(x)$ são polinômios e funções racionais impróprias.

$$\boxed{\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}}$$

Onde $\mathrm{Q(x)}$ e $\mathrm{R(x)}$ são, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de $\mathrm{N(x)}$ por $\mathrm{D(x)}$.

Exemplo 13: Seja a função racional $\frac{2x^2+7x+6}{x^2+2x+3}$

Resolução: Observamos que $gr(A) = gr(B) = 2.$ Então, de acordo com **Definição 14,** podemos afirmar que a fração do exemplo é racional imprópria. Com isso, essa fração satisfaz a observação **O4.** Resumidamente, toda fração deste tipo podemos "extrair *os inteiros".* Resolvendo o desenvolvimento a luz do **Exemplo 6.** Temos:

$$A(x) \equiv B(x).Q(x) + R(x)$$

Substituindo $A = 2x^2 + 7x + 6$ e $B(x) = x^2 + 2x + 3$, resulta:

$$2x^2 + 7x + 6 \ \equiv (x^2 + 2x + 3).a + bx + c$$

$$2x^2 + 7x + 6 \equiv ax^2 + (2a + b)x + (3a + c)$$

Pela igualdade de polinômios, **item 1.3.2**, forma-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = 7 \\ 3a + c = 6 \end{cases}$$

Como o já sabemos o valor de a, substituindo nas outras equações que encontramos $b = 3$ e $c = 0$. Logo, $Q(x) = 2$ e $R(x) = 3x$.

Assim, de acordo com **O4.** podemos escrever a função imprópria na forma:

$$\boxed{\frac{2x^2 + 7x + 6}{x^2 + 2x + 3} = 2 + \frac{3x}{x^2 + 2x + 3}}\ .$$

FRAÇÕES RACIONAIS SIMPLES

Definição 15: São frações racionais simples, as funções que possuem a seguinte configuração:

$$\frac{A}{(x-x_1)^n}$$

Temos que x é a variável independente, A e x_1 são constantes reais e n é um número natural.

Observação das frações racionais simples

O5. A soma de duas ou mais frações racionais simples, resulta em uma função racional própria.

Exemplo 14: Determine a soma das frações racionais $\frac{3}{x+1}+\frac{5}{x-2}$ **.**

Resolução: Utilizando a definição de **Soma** entre duas frações, temos:

$$\frac{3}{x+1}+\frac{5}{x-2}=\frac{3(x-2)+5(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{8x-1}{x^2-x-2}$$

Assim, concluímos que é válido a observação **O5.**

A ideia, agora, é inverter esse processo e escrever uma fração dada como uma soma de frações, cada uma das quais tendo um denominador mais simples. Esse procedimento é denominado como decomposição em frações parciais que iremos abordar no tópico a seguir**,** cada caso de decomposição dependerá do grau do polinômio que aparecer no denominador.

1.6 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

[4]Resolver um sistema linear significa obter o conjunto S, chamado de **conjunto solução do sistema,** cujos elementos são todas as soluções do sistema. Entre vários métodos existentes para a solução de um sistema linear, iremos abordar especificamente o escalonamento. Para isso precisamos definir o sistema linear escalonado.

Definição 16: Um sistema linear é escalonado, ou está na forma escalonada se somente se:

[4] As definições 16 e 17 está de acordo com (PAIVA, 2004)

i) Todas as equações apresentarem as incógnitas em uma mesma ordem;

ii) Em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não nulo;

iii) Existe uma ordem para as equações tal que, de uma equação para a outra, aumenta o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo.

Exemplo 15:

- $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 0x + 5y + 4z = 8 \\ 0x + 0y + 3z = 6 \end{cases}$ é um sistema linear escalonado que satisfaz a **Definição 16,** e

  que pode ser representado simplesmente por $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ 5y + 4z = 8 \\ 3z = 6 \end{cases}$.

- $\begin{cases} 3x + y + 5z = 2 \\ 0x + 2y - 2z = 1 \\ 0x + 4y + 2z = 3 \end{cases}$ não é um sistema linear escalonado, porque o número de coeficientes nulos que antecedem o primeiro coeficiente não nulo de cada equação não aumenta de uma equação para a outra (da 2ª para a 3ª equação), logo não satisfaz o item iii) da **Definição 16.**

1.6.1 RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR ESCALONADO

Existem apenas dois tipos de sistema linear escalonado, são eles:

1ªTipo: com o número de equações igual ao número de incógnitas;

2ªTipo: com o número de equações menor que o número de incógnitas;

RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR ESCALONADO DO 1° TIPO

Exemplo 16: Observe o sistema abaixo

$$\begin{cases} 4x + y + 3z = 5 \\ 5y - 2z = 4 \\ 3z = 9 \end{cases}$$

Resolução: Trata-se de um sistema linear escalonado do 1ªtipo, pois tem o número de equações iguais o número de incógnitas. Para solucionar esse sistema, resolvemos as equações de baixo para cima.

Iremos determinar o valor de z, como $3z = 9$, então $z = 3$.

Substituindo o valor de z na segunda equação, temos:

$$5y - 2z = 4$$

$$5y - 2.3 = 4$$

$$5y = 4 + 6$$

$$5y = 10$$

$$y = 2 \quad .$$

Substituindo os valores de $y\ e\ z$ na primeira equação, encontramos x.

$$4x + y + 3z = 5$$

$$4x + 2 + 3.3 = 5$$

$$4x = 5 - 11$$

$$4x = -6$$

$$x = -\frac{3}{2} \quad .$$

Logo, o conjunto solução do sistema é: $S = \left\{\left(-\frac{3}{2}, 2,3\right)\right\}$.

Propriedade do sistema linear escalonado do 1°tipo

P 5. Todo sistema linear escalonado do 1º tipo é possível e determinado (SPD), ou seja, conseguimos determinar os valores para as incógnitas do sistema.

1.6.2 SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES

Definição 17: Dois sistemas lineares, $A\ e\ A'$, **são equivalentes** se, e somente se, têm o mesmo conjunto solução. Indicaremos que $A\ e\ A'$ são equivalentes por $\boldsymbol{A \sim A'}$.

Exemplo 17: Os sistemas A: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$ e A': $\begin{cases} x + y = 7 \\ \quad y = 3 \end{cases}$ são equivalentes, pois ambos têm como conjunto solução $S = \{(4,3)\}$.

Propriedade dos sistemas lineares equivalentes

Sendo A ,A' e A'' sistemas lineares, decorrem da definição as seguintes propriedades:

P 6. Propriedade Reflexiva: $A \sim A$

P 7. Propriedade Simétrica: Se $A \sim A'$, então $A' \sim A$

P 8. Propriedade Transitiva: Se $A \sim A'$ e $A' \sim A''$, então $A \sim A''$

1.6.3 ESCALONAMENTO DE UM SISTEMA LINEAR

A resolução de um sistema linear escalonado é simples, conforme exemplificado nesse tópico **1.6.** A principal finalidade de relembrar esse método de resolução, será no desenvolvimento dos sistemas de equações lineares naquelas aplicações de decomposições nas questões de vestibulares a nível médio, tendo em vista que os alunos estudaram o assunto no 2º ano, com o intuito de encontrar as incógnitas que fazem parte da decomposição das frações parciais. Esse método transforma um sistema linear possível e não escalonado em um sistema equivalente na forma escalonada para melhor entendimento, observe o exemplo a seguir:

Exemplo 18: Determine a solução do sistema $A\colon \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$

Resolução: Para escaloná-lo**,** precisamos zerar um dos coeficientes da última equação. Multiplicando a 1ª equação por (-2), iremos obter o sistema equivalente:

$$A'\colon \begin{cases} -2x - 6y = -10 \\ 2x + 7y = 12 \end{cases}$$

Substituindo, no sistema A', a 2ª equação pela soma dela com a 1ª, temos o seguinte sistema:

$$A''\colon \begin{cases} -2x - 6y = -10 \\ 0x + y = 2 \end{cases}$$

Note que $A'' \sim A$ e que A'' está na forma escalonada.

Substituindo o valor de y, de acordo com a **Definição 17,** como os sistemas possuem a mesma solução é correto realizar essa substituição. Temos:

$$x + 3y = 5$$

$$x + 3.2 = 5$$

$$x = 5 - 6$$

$$x = -1 \quad .$$

Assim, a solução do sistema será $S = \{(-1,2)\}$.

É valida as observações abaixo na técnica que usaremos para transformar um sistema linear possível em um equivalente na forma escalonada.

Observações dos sistemas lineares:

O6. Permutando entre si duas ou mais equações de um sistema linear A, obtemos um novo sistema linear A', equivalente a A

O7. Multiplicando (ou dividindo) ambos os membros de uma equação de um sistema linear A por uma constante K, com K diferente de 0, obtemos um novo sistema A', equivalente a A.

O8. Substituindo uma equação de um sistema linear A pela soma, membro a membro, dessa equação com outra desse sistema, obtemos um novo sistema A', equivalente a A

Com base nesse método de resolução de sistemas lineares, vejamos a seguir os casos de decomposição de frações parciais.

1.7 CASOS DE DECOMPOSIÇÃO

A decomposição de uma fração racional em frações parciais pode ser considerada o processo inverso de adição ou subtração de duas, ou mais frações.

A seguir, conheceremos e demonstraremos os teoremas que relacionam cada um destes quatro casos de frações parciais. Além disso, no terceiro e último capítulo deste trabalho, apresentaremos dois métodos de resolução para o desenvolvimento das frações parciais:

1.7.1 1º CASO: PRODUTOS DE FATORES LINEARES DISTINTOS

O primeiro caso de decomposição chamado de produtos de fatores lineares distintos, é uma das mais importantes e utilizadas nos casos simples de decomposição, de acordo com a **Definição 13,** só é possível acontecer esse caso quando a fração racional for classificada como própria, ou seja, o grau do numerador tem que ser menor que o grau do denominador.

[5]Seja a função racional na seguinte forma:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \ .$$

[5] Seção está de acordo com (GUIDORRIZI, 2004)

Sendo o $gr(p) = 1$ e $gr(q) = 2$, considerando as raízes distintas do polinômio $q(x)$ sendo x_1 e x_2 , esse primeiro caso nos possibilita a decompor a fração na seguinte forma:

$$\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}}$$

Para que isso aconteça precisaremos do teorema a seguir:

Teorema 4: Os fatores lineares de $q(x)$ são lineares e distintos.

Neste caso, podemos escrever $q(x)$ na forma.

$$q(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Onde os $x_i, i = 1, \dots\dots, n,$ são distintos dois a dois.

Então a decomposição da função racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ em frações mais simples é dada por:

$$\boxed{f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} + \cdots + \frac{Z}{x - x_n}} \ .$$

Onde $A, B, \dots$ e Z são constantes que devem ser determinadas.

1.7.2 <u>2º CASO:</u> PRODUTOS DE FATORES LINEARES REPETIDOS

A principal diferença entre o primeiro caso exemplificado anteriormente para esse segundo caso são as raízes do polinômio $q(x)$. Considerando uma função racional na forma abaixo, e de acordo com a **Definição 13.**

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Sendo o $gr(p) = 1$ e $gr(q) = 2$, e considerando que as raízes do polinômio $q(x)$ são iguais, então $x_1 = x_2$, os fatores lineares repetidos nos possibilitam a decompor a fração na seguinte forma.

$$\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{(x - x_1)(x - x_1)} = \frac{p(x)}{(x - x_1)^2}}$$

Para que isso aconteça precisaremos do teorema a seguir:

Teorema 5: Se um fator linear $x - x_1$ de $q(x)$ tem multiplicidade r, a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma a seguir:

$$\boxed{f(x) = \frac{A}{(x - x_1)^r} + \frac{B}{(x - x_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{Z}{x - x_1}}$$

1.7.3 <u>3ºCASO:</u> FATORES LINEARES QUADRÁTICOS IRREDUTIVEIS DISTINTOS

Vejamos, agora, o terceiro caso de decomposição das frações racionais que possuem no denominador polinômios, que de acordo com a **Definição 5**, são aqueles classificados como irredutíveis, ou seja, polinômios que não possuem raízes reais. Para que isso aconteça precisaremos do teorema a seguir.

Teorema 6: Sejam $m, n, p, a, b, c \; e \; \alpha$ números reais dados tais que $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então existem constantes $A, B \; e \; D$ tais que.

$$\boxed{\frac{m^2 + nx + p}{(x - \alpha)(ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{Bx + D}{ax^2 + bx + c}}$$

1.7.4 <u>4º CASO</u>: FATORES QUADRÁTICOS IRREDUTIVEIS REPETIDOS

Teorema 7: Se um fator quadrático $x^2 + bx + c$ de $q(x)$ tem multiplicidade s ,a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma:

$$\boxed{\frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^n} + \frac{Cx + D}{(x^2 + bx + c)^{n-1}} + \cdots + \frac{Yx + Z}{x - a_i}}$$

Algumas demonstrações do teorema acima

Demonstração do Teorema 4 : (para o caso de $n = 2$)

Sejam x_1 , x_2, A e B números reais, com $x_1 \neq x_2$. Então existem constantes A e B tais que:

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{(A + B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Utilizando a igualdade dos denominadores, basta mostrar que existem $A \; e \; B$ tais que:

$$\begin{cases} A + B = m \\ Ax_2 + Bx_1 = -n \end{cases}.$$

Este sistema admite solução única dada por:

$$A = \frac{x_1 m + n}{x_1 - x_2} \ e \ B = -\frac{a_2 m + n}{x_1 - x_2}$$

Como $x_1 \neq x_2 \neq 0$ podemos concluir que é possível escrever a fração racional na decomposição de duas frações.

$$\boxed{\frac{mx + n}{(x - x_1)(x - a_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - a_2}} \qquad \square$$

Onde $A, B \ldots., Z$. são constantes que devem ser determinadas.

Demonstração do Teorema 5: (para o caso de $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$)

Sejam x_1 , x_2, A e B números reais, com $x_1 = x_2$. Então:

$$\frac{mx + n}{(x - x_1)^2} = \frac{mx - mx_1}{(x - x_1)^2} + \frac{mx_1 + n}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{mx + n}{(x - x_1)^2} = \frac{m(x - x_1)}{(x - x_1)^2} + \frac{mx_1 + n}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{mx + n}{(x - x_1)^2} = \frac{m(\cancel{x - x_1})}{(x - x_1)(\cancel{x - x_1})} + \frac{mx_1 + n}{(x - x_1)^2}$$

$$\frac{mx + n}{(x - x_1)^2} = \frac{m}{(x - x_1)} + \frac{mx_1 + n}{(x - x_1)^2}$$

Tomando – se, então, $A = m$ e $B = mx_1 + n$.:

$$\boxed{\frac{mx + n}{(x - x_1)^2} = \frac{A}{(x - x_1)} + \frac{B}{(x - x_1)^2}} \qquad \square$$

Demonstração do Teorema 6:

Realizando a operação de soma **OP1** entre as frações do segundo membro da equação (1.1), temos:

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+D}{ax^2+bx+c}=\frac{A\left(ax^2+bx+c\right)+(Bx+D)(x-\alpha)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$$

Resolvendo as operações no segundo membro da equação de acordo com a **Definição 10,** então:

$$\frac{A}{x-\alpha}+\frac{Bx+D}{ax^2+bx+c}=\frac{(\alpha A+B)x^2+(bA-\alpha B+D)x+(cA-\alpha D)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$$

A partir da equação, de acordo com **Definição 3,** temos a igualdade entre os polinômios

$$\frac{m^2+nx+p}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}=\frac{(\alpha A+B)x^2+(bA-\alpha B+D)x+(cA-\alpha D)}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$$

Basta então, mostrar que existem $A, B\ e\ D$ tais que, satisfaça o seguinte sistema:

$$\begin{cases}\alpha A+B=m\\ \mathrm{bA}-\alpha B+D=n\\ \mathrm{cA}-\alpha\mathrm{D}=\mathrm{p}\end{cases}.$$

O determinante do sistema é

$$\begin{bmatrix}\mathrm{a} & 1 & 0\\ \mathrm{b} & -\alpha & 1\\ \mathrm{c} & 0 & -\alpha\end{bmatrix}=\mathrm{a}\alpha^2+b\alpha+\mathrm{c}\neq 0$$

Pois, ax^2+bx+c não admite raiz real. O sistema acima admite, então, uma única solução. $\square$

2 METODOLOGIA DA PESQUISA

2.1 ABORDAGEM METODOLOGICA

Esta pesquisa possui o intuito de apresentar uma metodologia de aprendizagem, na qual o estudante ao analisar a questão, tenha o entendimento do problema e visualize quais os métodos de aplicações para as frações parciais.

> A Metodologia, em um nível aplicado, examina, descreve e avalia métodos e técnicas de pesquisa que possibilitam a coleta e o processamento de informações, visando ao encaminhamento e à resolução de problemas e/ou questões de investigação (PRODANOV; FREITAS, 2013, p.14).

A abordagem utilizada possui natureza qualitativa, segundo Creswell (2007), o pesquisador qualitativo é aquele que usa uma ou mais estratégias de investigação como guia de estudo, enquanto o pesquisador iniciante usa apenas uma estratégia.

No que tange a estratégia de investigação empregada, pode-se destacar a pesquisa explicativa. Nesse contexto, Gil (2008, p.47) ressalta, em sua obra, que esse tipo de pesquisa seria aquele que mais aprofunda o conhecimento da realidade, tendo em vista que ela explica os motivos e o porquê das coisas, tornando-se complexa e delicada.

Quanto ao procedimento técnico, de maneira auxiliar no entendimento do assunto das frações parciais, buscou -se o aprofundamento do tema através de procedimento bibliográfico, a fim de ampliar o entendimento acerca das frações parciais e as suas ramificações, sendo utilizado obras de autores, tais como: Boyer (1996), que de modo geral apresenta a história da matemática; Domingues (1991), que explana a definição formal de fração; e Guidorizzi (2014), que contribui com as demonstrações dos casos de decomposição.

As referências de (IEZZI 2013), (PAIVA, 2004), (BIANCHINNI, 1998) e (MACHADO, 2004) abordaram conceitos e técnicas preliminares para o entendimento de resolução das frações parciais, e (ZILL,2001) apresentou em seu livro as transformadas inversas de Laplace.

2.2 ETAPAS DA PESQUISA

1ª etapa: Pesquisa bibliográfica a partir das obras de Boyer (1996), Bianchinni (1998), Domingues (1991), Zill (2001), Paiva (2004), Machado (2004), Iezzi (2013) e Guidorizzi (2014), 2ª etapa: Elaboração das seções da fundamentação teórica, a partir da pesquisa bibliográfica inicial;

3ª etapa: Análise dos tipos e métodos de resolução relacionados às frações parciais que são cobrados nos concursos e vestibulares;

4ª etapa: Selecionar 20 questões de concursos e vestibulares que permitam desenvolvê-las por meio das frações parciais;

5ª etapa: Resolver as questões selecionadas sob à luz dos princípios teóricos dos métodos de resolução, bem como o raciocínio lógico do entendimento das operações entre as frações, polinômios, e a resolução de sistemas do primeiro grau, e para o desenvolvimento do sistema de equação utilizaremos os métodos simples: adição, substituição e comparação. para complementarmos utilizamos também o método de escalonamento.

3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

3.1 METODOS DE RESOLUÇÃO DE FRAÇÕES PARCIAIS

A seguir, abordaremos 3 métodos para decompor uma função racional em soma de frações parciais. Cada método tem suas vantagens, sendo que a maior ou menor conveniência de um método depende do problema em questão.

3.1.1 M1: MÉTODO IGUALANDO OS COEFICIENTES ATRAVES DE SISTEMAS

[6]Esse método é o mais utilizado para decompor as frações, ele se aplica em todas as situações em todos os casos de decomposições.

Exemplo 19. (Resolução 1) Determine a decomposição em frações parciais de $\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)}$.

Resolução:

A fim de utilizar o **teorema 4**, observamos que o denominador da fração são fatores lineares distintos, $q(x) = (x+1)(x-2)$ então conseguimos escrever a fração racional na soma de frações parciais. O objetivo é encontrar os coeficientes A e B, tais que:

[6] Nesta seção a abordagem do método de solução está baseada em (MACHADO, 2004)

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} \tag{3.1}$$

Realizando a **soma** entre as frações do segundo membro da equação (3.1), temos:

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{A(x-2)+B(x+1)}{(x+1)(x-2)}\ .$$

Assim, temos duas frações iguais com o mesmo denominador, decorre que essas frações também têm necessariamente o mesmo numerador e, portanto, temos a igualdade de polinômios. De acordo com a **definição 3,** então:

$$8x-1=A(x-2)+B(x+1)=(A+B)x+(-2A+B) \tag{3.2}$$

Igualando os polinômios da equação (3.2), formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=8 \\ -2A+B=-1 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por -1, temos:

$$\begin{cases} A+\cancel{B}=8 \\ 2A-\cancel{B}=1 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$3A=9 \quad \therefore\ A=3\,.$$

Substituindo o valor de $A=3$ na primeira, encontramos $B=5$. Assim, escrevemos a decomposição da fração parcial, substituindo na equação (3.1), na forma a seguir.

$$\boxed{\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)}=\frac{3}{x+1}+\frac{5}{x-2}}\ . \tag{3.3}$$

A seguir, abordaremos o **<u>2° caso</u>** de decomposição, a principal diferença para este **<u>1°caso</u>** será o polinômio que aparecerá no denominador, pois possui raízes múltiplas de um determinado número.

Exemplo 20. Determine a decomposição em frações parciais de $\frac{-4x^3+10x^2-3x+3}{(x-1)^3(x+2)}$ **.**

Resolução:

Utilizando o **teorema 5,** procuramos constantes $A, B, C\ e\ D$ tais que:

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+2} \tag{3.4}$$

Realizando a **soma** entre as frações do segundo membro da equação (3.4) de acordo com a operação definida, temos:

$$\frac{-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3}{(x-1)^3(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^3}{(x-1)^3(x+2)} \tag{3.5}$$

No decorrer deste desenvolvimento, procedemos da mesma maneira como no exemplo anterior. Como os polinômios da equação (3.5) possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 8**, temos que:

$$-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3 = A(x+2) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)^2(x+2) + D(x-1)^3$$

$$-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3$$

$$= A(x+2) + B(x^2 + x - 1) + C(x^3 - 3x + 2) + D(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)$$

$$-4x^3 + 10x^2 - 3x + 3$$

$$= (C+D)x^3 + (B-3D)x^2 + (A+B-3C+3D)x + (2A-2B+2C-D) \tag{3.6}$$

Igualando os coeficientes da equação (3.6), formamos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} C + D = -4 \\ B - 3D = 10 \\ A + B - 3C + 3D = -3 \\ 2A - 2B + 2C - D = 3 \end{cases} .$$

Substituindo a primeira e a segunda equação na terceira e quarta equação, obtemos:

$$\begin{cases} A + 9D = -25 \\ 2A - 9D = 31 \end{cases}$$

Somando se as equações, temos:

Obtemos $3A = 6$, ou seja, $A = 2$ e, então, $D = -3$ e $B = 1$ e $C = -1$. Assim, substituindo os coeficientes na equação (3.4), a decomposição fica na forma:

$$\boxed{\frac{-4x^3+10x^2-3x+3}{(x-1)^3(x+2)}=\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{x-1}+\frac{-3}{x+2}}\ . \quad (3.7)$$

O terceiro caso de decomposição, ocorre quando o denominador tem fatores quadráticos irredutíveis (fatores do 2° grau sem raízes reais), vejamos o exemplo 17.

Exemplo 21. Determine a decomposição em frações parciais de $\frac{2x-3}{x^3+x}$ **.**

Resolução:

Observamos o denominador x^3+x, colocando o fator comum em evidência podemos escrever na forma fatorada $x^3+x=x(x^2+1)$ de acordo com a **definição 5** o termo x^2+1 é um fator irredutível. Utilizando o **teorema 6,** procuramos constantes $A, B, e\ C$ tais que:

$$\frac{2x-3}{x(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)}+\frac{C}{x}\ . \quad (3.8)$$

Realizaremos a **soma** entre as frações do segundo membro da equação (3.8), como os denominadores são diferentes utilizaremos da **Definição 9,** Então:

$$\frac{2x-3}{x(x^2+1)}=\frac{x.(Ax+B)+C(x^2+1)}{x(x^2+1)} \quad (3.9)$$

Aplicando a propriedade de distributiva no numerador do segundo membro da equação (3.9), temos:

$$\frac{2x-3}{x(x^2+1)}=\frac{Ax^2+Bx+Cx^2+C}{x(x^2+1)}$$

$$\frac{2x-3}{x(x^2+1)}=\frac{(A+C)x^2+Bx+C}{x(x^2+1)}\ . \quad (3.10)$$

Como os polinômios da equação (3.10) possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 8**, temos que:

$$2x-3=(A+C)x^2+Bx+C \quad (3.11)$$

Utilizando a **Definição 3**, na equação (3.11) como consequência formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B = 2 \\ C = -3 \end{cases} .$$

Resolvendo o sistema obtemos os valores dos coeficientes $C = -3$, $A = 3$ e $B = 2$. Assim, substituindo esses valores na equação (3.8) podemos escrever a decomposição da fração racional na forma:

$$\boxed{\frac{2x-3}{x(x^2+1)} = \frac{3x+2}{(x^2+1)} - \frac{3}{x}} . \qquad (3.12)$$

Esse tipo de decomposição funciona mesmo se os fatores quadráticos têm raízes reais, desde que estas não sejam raízes de outros fatores do denominador.

Exemplo 22. Determine a decomposição em frações parciais de $\frac{x^3}{(x^2+1)^2}$ **.**

Resolução:

Observamos para o denominador se deparamos com $(x^2+1)^2$ que é uma quadrática irredutível repetida. Utilizando o **teorema 7,** procuremos constantes $A, B,\ C\ e\ D$ tais que:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \qquad (3.13)$$

Realizando a **soma** entre as frações do segundo membro da equação (3.13), como os denominadores são diferentes utilizaremos da **Definição 9,** para desenvolvimento da decomposição. Então:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)\ + (Cx+D)}{(x^2+1)^2} \qquad (3.14)$$

A fim de utilizar a **Definição 10** no segundo membro da equação (3.14), temos:

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + x(A+C) + B + D}{(x^2+1)^2} \qquad (3.15)$$

Como os polinômios da equação (3.15) possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 8**, temos que:

$$x^3 = Ax^3 + Bx^2 + x(A+C) + B + D \qquad (3.16)$$

Utilizando a **Definição 3**, na equação (3.16) como consequência formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ A + C = 0 \\ B + D = 0 \end{cases}$$

Obtemos $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ e $D = 0$. Assim, substituindo esses valores na equação (3.13) podemos escrever a decomposição da fração racional na forma:

$$\boxed{\frac{x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}} \, . \qquad (3.17)$$

Verificou-se que de fato que é importante analisarmos primeiramente os assuntos que antecedem as frações parciais, para que possamos com base nessas definições, teoremas, propriedades e observações feitas, trabalharmos os métodos de resoluções.

Percebemos que após utilizar esses casos de decomposições, não é tão simples ter uma maneira elementar de resolver cada situação, quando identificamos as frações racionais devemos primeiramente observarmos o polinômio presente no seu denominador; entretanto, será necessário desenvolver outro método de resolução.

3.1.2 M2: MÉTODO DE HEAVISIDE

[7]Esse método é utilizado para decompor **fração própria**. Esse tipo de decomposição também é utilizado no cálculo de integrais de funções racionais e na transformada inversa de Laplace.

Exemplo 19. (Resolução 2) Determine a decomposição em frações parciais de $\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)}$.

Resolução: A fim de utilizar o **teorema 4**, observamos que o denominador da fração são fatores lineares distintos, $q(x) = (x+1)(x-2)$ então conseguimos escrever a fração racional na soma de frações parciais. O objetivo é encontrar os coeficientes A e B, tais que:

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} \tag{3.18}$$

Utilizando o método de Heaviside, precisamos identificar o valor que zera o denominador da fração em que o coeficiente que está localizado. Observe a equação (3.18) abaixo:

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Analisando a fração em destaque, para que o denominador resulte um valor nulo, o x tem que ser igual a – 1, substituindo esse valor no primeiro membro da equação (3.18) e desconsiderando o fator $x+1$, temos:

$$\frac{8x-1}{(x-2)} = \frac{8(-1)-1}{(-1-2)} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Com isso, encontramos que o valor do coeficiente A será igual a 3.

[7] Nesta seção a abordagem do método de solução está baseada em (ZILL, 2001)

O mesmo processo iremos fazer para encontrarmos o coeficiente B, precisamos identificar qual o valor que zera o denominador da fração que se encontra.

$$\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

Nesse caso, para zerar o denominador o valor de x tem que ser igual a 2, substituindo esse valor primeiro membro da equação (3.18) e desconsiderando o fator $x-2$, temos:

$$\frac{8x-1}{(x+1)} = \frac{8.2-1}{(2+1)} = \frac{16-1}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

Assim, concluímos que o valor dos coeficientes são $A = 3$ e $B = 5$, substituindo esses valores na equação (3.18) escrevemos a decomposição da fração racional na forma:

$$\boxed{\frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{x+1} + \frac{5}{x-2}} \tag{3.19}$$

Exemplo 23: Determine a decomposição em frações parciais de $\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)}$

Resolução: Utilizando o **<u>1°caso</u>** de decomposição com base no **teorema 4**, conseguimos escrever a fração na forma:

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} \tag{3.20}$$

Desenvolvendo pelo **M2**, para encontrar o coeficiente A, temos que observar o valor que zera o denominador que se encontra o coeficiente.

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Nesse caso, percebemos que basta colocar o número 0 no denominador do coeficiente A que automaticamente seu denominador fica nulo, substituindo esse valor no primeiro membro equação (3.20), e desconsiderando o fator x no denominador, temos:

$$\frac{2x+1}{(x+1)(x-2)} = \frac{2.0+1}{(0+1)(0-2)} = \frac{+1}{1(-2)} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Logo, o valor do coeficiente $A = -1/2$, continuaremos esse mesmo processo para encontrarmos os outros coeficientes.

A fim de encontrar o coeficiente B, novamente identificaremos o valor que zera o denominador da fração que se encontra o coeficiente B.

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Nesse caso, como o denominador é $x+1$, o valor que zera essa expressão é o - 1. Então, substituindo esse valor de x no primeiro membro da equação (3.20), e desconsiderando o fator $x+1$ temos:

$$\frac{2x+1}{x(x-2)} = \frac{2.(-1)+1}{(-1)(-1-2)} = \frac{-2+1}{(-1)(-3)} = \frac{-1}{+3} = -\frac{1}{3}$$

Logo, o valor do coeficiente $B = -1/3$, por fim faremos o mesmo processo para encontrar o último coeficiente.

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Nesse caso, como o denominador é $x-2$, o valor que zera essa expressão é x igual a 2. Então, substituindo esse valor de x no lado no primeiro membro da equação (3.20), e desconsiderando o fator, temos:

$$\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{2.2+1}{2(2+1)} = \frac{4+1}{2.3} = \frac{5}{6}$$

Logo, o valor do coeficiente $C = 5/6$, assim substituindo os valores encontrados na equação (3.20), resulta:

$$\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{\frac{-1}{2}}{x} + \frac{\frac{-1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{5}{6}}{x-2} \quad .$$

Como no numerador temos frações, realizando a divisão de fração, temos:

$$\boxed{\frac{2x+1}{x(x+1)(x-2)} = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{6(x-2)}} \quad . \qquad (3.21)$$

3.1.3 TRANSFORMADA DE INVERSA DE LAPLACE

[8]Nesse método trabalharemos com problemas de transformada inversa, ou seja, dada uma função $F(s)$, tentaremos encontrar uma função $F(t)$ cuja transformada de Laplace seja $F(s)$. Dizemos então que $F(t)$ é a transformada de Laplace inversa de $F(s)$ e escrevemos na forma.

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

A transformada de Laplace inversa é uma transformada linear; isto é, para constantes α e β,

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

O uso de frações parciais é muito importante para encontrar a transformada de Laplace para que isso aconteça precisaremos da seguinte transformada inversa:

$$\boxed{e^{at} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}} \quad .$$

Resolveremos dois casos básicos desse método. Com exemplo, os denominadores que contém, fatores lineares distintos e fatores lineares repetidos. São respectivamente os 2 primeiros casos de decomposição como já vistos nesse trabalho.

[8] Nesta seção a abordagem do método de solução está baseada em (ZILL, 2001)

Exemplo 24: Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\}$$

Resolução: (Heaviside) Utilizando o **1°caso** de decomposição com base no **teorema 4**, existem únicas constantes $A, B\ e\ C$ tais que.

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} \tag{3.22}$$

Utilizando o método de Heaviside **M2**, para determinar o valor dos coeficientes precisamos identificar o valor que zera o denominador da fração em que o coeficiente que está localizado. Observe a equação (3.22) abaixo:

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

Analisando a fração em destaque, para que o denominador seja zero, o valor de s tem que ser igual a 1, substituindo esse valor no primeiro membro da equação (3.22), e desconsiderando o fator $s-1$, temos:

$$\frac{1}{(s+2)(s+4)} = \frac{1}{(1+2)(1+4)} = \frac{1}{3.5} = \frac{1}{15} \quad \therefore \quad A = \frac{1}{15} \quad .$$

A fim de encontrar o coeficiente B, novamente identificaremos o valor que zera o denominador da fração que se encontra o coeficiente B.

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

Nesse caso, como o denominador é $s+2$, o valor que zera essa expressão é o - 2. Então, substituindo esse valor de s no primeiro membro da equação (3.22), e desconsiderando o fator $s+2$, temos:

$$\frac{1}{(s-1)(s+4)} = \frac{1}{(-2-1)(-2+4)} = \frac{1}{(-3)(+2)} = -\frac{1}{6} \quad \therefore \quad B = -\frac{1}{6} \quad .$$

Por fim, para encontrarmos o valor do último coeficiente.

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4}$$

Como o denominador é $s+4$, o valor que zera essa expressão é s igual a -4. Então, substituindo esse valor de s no lado no primeiro membro da equação (3.22), e desconsiderando o fator $s+4$, temos:

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{(-4-1)(-4+2)} = \frac{1}{(-5)(-2)} = \frac{1}{10} \quad \therefore \quad C = \frac{1}{10} \quad .$$

Substituindo os valores dos coeficientes, na equação (3.22), podemos escrever

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{1/15}{s-1} + \frac{-1/6}{s+2} + \frac{1/10}{s+4}$$

E assim, pelo **teorema 8,** temos.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = \frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} \quad .$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right\} = \frac{1}{15}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}} \quad .$$

Exemplo 25: Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} \quad .$$

Resolução: (Igualando coeficientes)

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3} \qquad (3.23)$$

Realizando a **soma** das frações do segundo membro da equação (3.23), temos:

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{As(s+2)^3+B(s+2)^3+Cs^2(s+2)^2+Ds(s+2)+Es^2}{s^2(s+2)^3} \quad .$$

Como os polinômios da equação possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 8**, temos que:

$$s+1 = As(s+2)^3 + B(s+2)^2 + Cs^2(s+2)^2 + Ds(s+2) + Es^2$$

Fazendo $s=-2$, temos:

$$(-2)+1 = A(-2)(-2+2)^3 + B(-2+2)^3 + C(-2)^2(-2+2)^2 + Ds(-2+2) + E(-2)^2$$

$$-1 = 4E \quad \therefore \quad E = -\frac{1}{4} \quad .$$

Fazendo $s=0$, temos:

$$0+1 = A0(0+2)^3 + B(0+2)^3 + C0^2(0+2)^2 + D0(0+2) + E0^2$$

$$0+1 = 4B$$

$$0+1 = 8B \quad \therefore \quad B = \frac{1}{8} \quad .$$

Fazendo $s=0$ e $s=-2$, concluímos que $B=\frac{1}{8}$ e $E=-\frac{1}{4}$, respectivamente. Igualando os coeficientes de s^4, s^3 e s, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 6A+B+4C+D=0 \\ 8A+12B=1 \end{cases}$$

Como $B=\frac{1}{8}$, substituindo na segunda e terceira equação, temos:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 48A+32C+8D=-1 \\ 64A+12=8 \end{cases}$$

Assim,

$$64A=-4$$

$$A=-1/16 \quad .$$

Como $A+C=0$, então $A=-C$, portanto $C=1/16$.

Por fim, para encontrarmos o valor do coeficiente D, basta substituirmos os valores encontrados na segunda equação.

$$48A+32C+8D=-1$$

$$48.\left(-\frac{1}{16}\right) + 32\left(\frac{1}{16}\right) + 8D = -1$$

$$\left(-\frac{48}{16}\right)+\left(\frac{32}{16}\right)+8D=-1$$
$$-3+2+8D=-1$$
$$8D=-1+1$$
$$8D=0 \quad \therefore \quad D=0 \quad .$$

E assim, pelo **teorema 8,** temos.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/16}{\mathrm{s}}+\frac{1/8}{s^2}+\frac{1/16}{s+2}+\frac{0}{(s+2)^2}+\frac{-1/4}{(s+2)^3}\right\}$$

Por fim, pela definição, a transformada de Laplace inversa é uma transformada linear, então:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}=-\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}-\frac{1}{8}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^3}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}\right\}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}e^{-2t}-\frac{1}{8}t^2e^{-2t}} \quad .$$

Com base na apresentação desses 2 métodos de resolução, a seguir iremos aplicar esses métodos em questões de vestibulares que ocorreram no Brasil nos últimos anos, abordaremos todos os níveis de conhecimento do fundamental ao médio, e por fim com aplicações em questões de concurso no ensino superior, vejamos a seguir.

3.2 APLICAÇÕES DOS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DAS FRAÇÕES PARCIAIS.

Aplicação 1: (UNIFESP) Se

$$\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}$$

é verdadeira para todo x real, $x \neq 1$, $x \neq 2$, então o valor de $a.b$ é:

a) – 4
b) – 3
c) – 2
d) 2
e) 6

Resolução (Método M1) :

Observamos que o denominador da fração são fatores lineares distintos, $q(x) = (x-1)(x-2)$ então conseguimos escrever a fração racional na soma de frações parciais. O objetivo é encontrar os coeficientes A e B, tais que:

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2}$$

Realizando a **soma** entre as frações do segundo membro da equação, temos:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{a(x-2)+b(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax-2a+bx-b}{(x-1)(x-2)} = \frac{ax+bx-2a-b}{(x-1)(x-2)}$$

Assim, temos duas frações iguais com o mesmo denominador, decorre que essas frações também têm necessariamente o mesmo numerador e, portanto, temos a seguinte igualdade de polinômios, de acordo com a **definição 3,** temos que:

$$x = (a+b)x - (2a+b)$$

Realizando a luz o **M1**, formamos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases} .$$

Multiplicando a 1° equação por -1 e resolvendo o sistema, pelo método da adição. Temos:

$$\begin{cases} -a-b=-1 \\ 2a+b=0 \end{cases}$$

Somando as equações encontramos $a = -1$ e $b = 2$, sendo assim:

$$\boxed{a.b = (-1).(2) = -2} .$$

Resposta correta: **Alternativa c) .**

Aplicação 2: (UNIFESP) Sendo a e b números reais, o valor de $a^2 + b^2$, de modo que

$$\frac{a}{x-2} + \frac{bx}{x+2} = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

e) 16

Resolução (Método M1) :

Seja,

$$\frac{a}{x-2} + \frac{bx}{x+2} = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Realizando a **soma** entre as duas frações primeiro membro da equação, temos:

$$\frac{a(x+2) + bx(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Assim,

$$\frac{a(x+2) + bx(x-2)}{x^2 - 4} = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

De acordo com a **Definição 10,** no primeiro membro da equação, temos:

$$\frac{ax + 2a + bx^2 - 2bx}{x^2 - 4} = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Colocando x em evidência,

$$\frac{bx^2 + (a-2b)x + 2a}{x^2 - 4} = \frac{-x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 8**, temos que:

$$-x^2 + 3x + 2 = bx^2 + (a-2b)x + 2a$$

formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} b = -1 \\ a - 2b = 3 \\ 2a = 2 \end{cases}$$

Imediatamente encontramos $b = -1$, e pela terceira equação encontramos $a = 1$.

Logo, valor de:

$$a^2 + b^2 = 1^2 + (-1)^2$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = 2} \ .$$

Resposta correta: **Alternativa c) .**

Aplicação 3: (UNIFOR – CE) Se $\frac{2x-1}{x^2+5x+6} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$, então a e b devem ser números reais tais que:

a) $a = b + 1$
b) $b = a + 1$
c) $a.b = 35$
d) $\boldsymbol{b = a + 12}$
e) $a = b - 6$

Resolução (Método M1) :

Utilizaremos o método **M1** para solucionar o problema, fatorando o denominador, temos:

$$\frac{2x-1}{x^2+5x+6} = \frac{2x-1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$$

Realizando a **soma** entre as frações, temos:

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{ax+3a+bx+2b}{(x+2)(x+3)}$$

Assim,

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a(x+3)+b(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{(a+b)x+3a+2b}{(x+2)(x+3)}$$

De acordo com a **Definição 3,** resulta no seguinte sistema**:**

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} .$$

Resolvendo o sistema pelo método da substituição**,** isolando a incógnita a a 1° equação, temos:

$$a = 2 - b \ \ (*)$$

Substituindo essa sentença na segunda equação.

$$3a + 2b = -1$$

$$3(2 - b) + 2b = -1$$

$$-b = -7 \quad \therefore \quad b = 7 .$$

Substituindo na equação $(*)$**,** temos $a = 2 - 7 = \ -5$. Como $a = -\,5$ e $b = 7$, então:

$$\boxed{b = a + 12} .$$

Resposta correta: **Alternativa d) .**

Aplicação 4: (CMM – 2018) Para que se tenha a seguinte igualdade:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} = \frac{x^2 + 5x - 8}{x(x^2 - 4)}$$

Os valores numéricos reais de A, B e C devem ser iguais a:

a) $A = \ -2 \ , B = 4, \ C = \ -1$

b) $A = \ 2 \ , B = -4, \ C = \ 1$

c) $A = \ 2 \ , B = -\frac{7}{4}, \ C = \ \frac{3}{4}$

d) $\boldsymbol{A = \ 2 \ , B = \frac{3}{4}, \ C = \ -\frac{7}{4}}$

e) $A = \ -2 \ , B = -\frac{3}{4}, \ C = \ \frac{7}{4}$

Resolução (Método M1):

Para resolvermos essa aplicação, pode – se utilizar o método **M1,**

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{x^2+5x-8}{x(x^2-4)}$$

Realizando a **soma** entre as frações de acordo com a operação definida, temos:

$$\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+5x-8}{x(x^2-4)}$$

Assim, realizando a **Definição 10,** no primeiro membro da equação, temos:

$$\frac{A(x^2-4)+B(x^2+2x)+C(x^2-2x)}{x(x^2-4)}=\frac{x^2+5x-8}{x(x^2-4)}$$

$$\frac{Ax^2-4A+Bx^2+2Bx+Cx^2-2Cx}{x(x^2-4)}=\frac{x^2+5x-8}{x(x^2-4)}$$

Organizando os termos semelhantes

$$\frac{Ax^2+Bx^2+Cx^2+2Bx-2Cx-4A}{x(x^2-4)}=\frac{x^2+5x-8}{x(x^2-4)}$$

Colocando em evidência os termos com x^2 e x

$$\frac{x^2(A+B+C)+x(2B-2C)-4A}{x(x^2-4)}=\frac{x^2+5x-8}{x(x^2-4)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$x^2(A+B+C)+x(2B-2C)-4A=x^2+5x-8$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ 2B-2C=5 \\ -4A=-8 \end{cases}$$

Assim, o valor de $A = 2$, substituindo na primeira equação, temos:

$$\begin{cases} B + C = -1 \\ B - C = 5/2 \end{cases}$$

Somando as duas equações, temos $B = 3/4$ e $C = -7/4$.

Assim, concluímos que:

$$\boxed{A = 2; B = \frac{3}{4}; e\ C = -\frac{7}{4}} \quad .$$

Resposta correta: **Alternativa d) .**

Aplicação 5: (U.F.S CAR – SP) Para todo x real, $x \neq 0, x \neq 1, x \neq -1$, os valores de $R, S\ e\ T$ que tornam verdadeira a igualdade:

$$\frac{4x+2}{x(x^2-1)} = \frac{R}{x} + \frac{S}{x+1} + \frac{T}{x-1}$$

São, respectivamente, iguais a:

a) $2\,, -1\ e\ 3$
b) $2\,, 1\ e - 3$
c) $\boldsymbol{-2\,, -1\ e\ 3}$
d) $-2\,, 1\ e - 3$
e) $-2\,, 1\ e\ 3$

Resolução (Método M2):

Antes de começarmos a desenvolver a resolução desta aplicação, observamos que o denominador do primeiro membro da equação é igual ao **exemplo 8** da **Definição 5**, portanto conseguimos escrever o polinômio $(x^2 - 1)$ na forma $(x+1)(x-1)$ sendo assim reescrevendo, temos:

$$\frac{4x+2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{R}{x} + \frac{S}{x+1} + \frac{T}{x-1}$$

A fim de utilizar o método **M2** no desenvolvimento desta aplicação, primeiramente iremos encontrar o coeficiente R, para isso temos de observar o valor de x que zera o numerador, nesse caso o x tem que ser 0. Substituindo esse valor, no primeiro membro da equação.

$$\frac{4x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{4.0+2}{(0+1)(0-1)} = \frac{2}{-1} = -2 \quad \therefore \quad R = -2 \ .$$

Realizaremos o mesmo processo para encontrar o coeficiente S, observando a fração em destaque abaixo, temos como numerador o termo $x+1$, para zerar o numerador o valor de x tem que ser - 1.

$$\frac{4x+2}{x(x+1)(x-1)} = \frac{R}{x} + \frac{S}{x+1} + \frac{T}{x-1}$$

Substituindo $x = -1$, no primeiro membro da equação, temos:

$$\frac{4x+2}{x(x-1)} = \frac{4(-1)+2}{(-1)(-1-1)} = \frac{-4+2}{2} = -1 \quad \therefore \quad S = -1 \ .$$

Por fim, para encontrarmos T, temos que substituir na primeira equação $x = 1$.

$$\frac{4x+2}{x(x+1)} = \frac{4.1+2}{1.(1+1)} = \frac{6}{2} = 3 \quad \therefore \quad T = 3 \ .$$

Logo,

$$\boxed{R = -2; S = -1 \ e \ T = 3} \ .$$

Resposta correta: **Alternativa c) .**

Aplicação 6: (MACK – SP) Os valores de $\boldsymbol{R, P\ e\ A}$ para que a igualdade

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}=\frac{R}{x}+\frac{P}{x+1}+\frac{A}{x-1}$$

Seja uma identidade são, respectivamente.

a) $3\,,1\ e\ 2$
b) $\mathbf{1\,,-2\ \boldsymbol{e}\ 3}$
c) $3\,,-2\ e\ 1$
d) $1\,,3\ e-2$
e) $-2\,,1\ e\ 3$

Resolução (Método M1) :

Para a resolução desse problema, pode – se utilizar o método **M1.**

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}=\frac{R}{x}+\frac{P}{x+1}+\frac{A}{x-1}$$

Realizando a soma das frações do segundo membro da equação, temos:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}=\frac{R(x-1)(x+1)+Px(x-1)+Ax(x+1)}{x^3-x}$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}=\frac{Rx^2-R+Px^2-Px+Ax^2+Ax}{x^3-x}$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x^3-x}=\frac{(R+P+A)x^2+(A-P)x-R}{x^3-x}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$2x^2+5x-1=(R+P+A)x^2+(A-P)x-R$$

Com isso, realizando com o método **M1**, formaremos o sistema:

$$\begin{cases} R+P+A=2 \\ -P+A=5 \\ R=1 \end{cases}$$

O sistema formado, satisfaz a **Definição 16,** resolvendo o sistema pelo método de escalonamento.

$$\begin{cases} R+P+A=2 \\ 0R-P+A=5 \\ R+0P+0A=1 \end{cases}$$

Subtraindo da linha 3 a linha 1, multiplicada por menos 1 para obter os zeros do elemento principal abaixo:

$$\begin{cases} R+P+A=2 \\ 0R-P+A=5 \\ 0R-P-A=-1 \end{cases}$$

Subtraindo da linha 3 a linha 2, multiplicada por 1 para obter os zeros do elemento principal abaixo:

$$\begin{cases} R+P+A=2 \\ 0R-P+A=5 \\ 0R-0P-2A=-6 \end{cases}$$

Assim, escalonando o sistema encontramos:

$$\begin{cases} R+P+A=2 \\ -P+A=5 \\ -2A=-6 \end{cases}$$

Logo, $A=3$.

Substituindo esse valor na segunda equação,

$$-P+A=5$$

$$-P+3=5$$

$$-P=5-3$$

$$P=-2\ .$$

Como $A=3$ e $P=-2$, substituindo esses valores na primeira equação, temos:

$$R+P+A=2$$

$$R-2+3=2$$

$$R=2-1$$

$$R=1\ .$$

Assim, concluímos que:

$$\boxed{R=1; P=-2\ e\ A=3}\ .$$

Resposta correta: **Alternativa b) .**

Aplicação 07: (EN) Os valores de $\boldsymbol{A, B\ e\ C}$ que tornam verdadeira a identidade

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

são tais que:

a) $A - B + C = 5$
b) $A - B - C = 3$
c) $\boldsymbol{A + B - C = 1}$
d) $2A - B + C = 7$
e) $A - 2B + C = 2$

Resolução (Método M2):

Utilizando o método de Heaviside **M2**, para a resolução desse problema. Fatorando o polinômio que se encontra no denominador da equação, podemos reescrever da seguinte maneira.

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Para determinar o valor do coeficiente A precisamos identificar o valor que zera o denominador da fração em que o coeficiente que está localizado.

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Analisando a fração em destaque, para que o denominador seja zero, o valor de x tem que ser igual a 0, substituindo esse valor no primeiro membro da equação, desconsiderando o fator x , temos:

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{(x-1)(x-2)} = \frac{9.0^2 - 16.0 + 4}{(0-1)(0-2)} = \frac{4}{2} \quad \therefore \quad A = 2 \; .$$

A fim de encontrar o coeficiente B, novamente identificaremos o valor que zera o denominador da fração que se encontra o coeficiente B.

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Nesse caso, como o denominador é $x - 1$, o valor que zera essa expressão é o 1. Então, substituindo esse valor de x no primeiro membro da equação (3.20), temos:

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x(x-2)} = \frac{9.1^2 - 16.1 + 4}{1(1-2)} = \frac{9 - 16 + 4}{1(1-2)} = \frac{-7+4}{-1} = 3 \quad \therefore \quad B = 3 \ .$$

E por fim, para encontrarmos o valor do coeficiente C, basta observarmos o denominador da fração em destaque, como o denominador é dado $x - 2$ o valor que zera do denominador dessa fração é o número 2.

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2}$$

Substituindo o número 2, no primeiro membro da equação, temos:

$$\frac{9x^2 - 16x + 4}{x(x-1)} = \frac{9.2^2 - 16.2 + 4}{2.(2-1)} = \frac{36 - 32 + 4}{2} = 4 \quad \therefore \quad C = 4 \ .$$

Assim, os valores dos coeficientes são $A = 2$, $B = 3$ e $C = 4$.

Concluímos que:

$$\boxed{A + B - C = 1} \ .$$

Pois,

$$2 + 3 - 4 = 1 \ .$$

Resposta correta: **Alternativa c) .**

Aplicação 08: (AFA) Se

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Então $\boldsymbol{A^2} + \boldsymbol{BC}$ vale:

a) 7/9
b) 11/9
c) 5/3
d) 19/9

Resolução (Método M1) :

Para a resolução desse problema, pode – se utilizar o método **M1.**

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Realizando a **soma** das frações do segundo membro da equação, temos:

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x^2-x-2) + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Cx}{x(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Cx}{x(x+1)(x-2)}$$

Colocando em evidência os termos x e x^2

$$\frac{x+2}{x(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A}{x(x+1)(x-2)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$x+2 = (A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -A - 2B + C = 1 \\ -2A = 2 \end{cases}$$

Imediatamente encontramos o valor de $A = -1$. Substituindo o valor do coeficiente A na primeira e segunda equação, temos:

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ -2B + C = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por -1, e somando as duas equações encontramos o valor do coeficiente B.

$$\begin{cases} B + \cancel{C} = 1 \\ 2B - \cancel{C} = 0 \end{cases}$$

Assim, o valor de $B = \frac{1}{3}$.

Substituindo os valores de A e B na primeira equação.

$$A + B + C = 0$$

$$-1 + \frac{1}{3} + C = 0$$

$$C = \frac{2}{3}\ .$$

Portanto, resolvendo o sistema encontramos os valores de $A = -1$, $B = \frac{1}{3}$ e $C = \frac{2}{3}$.

Então $\boldsymbol{A^2} + \boldsymbol{BC}$ será:

$$\boldsymbol{A^2} + \boldsymbol{BC} = (-1)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{A^2} + \boldsymbol{BC} = 1 + \frac{2}{9}$$

$$\boxed{\boldsymbol{A^2} + \boldsymbol{BC} = \frac{11}{9}}\ .$$

Resposta correta: **Alternativa b) .**

Aplicação 09: (UFAM 2006) Se os números reais A e B satisfazem a igualdade

$$\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Com $x \neq \pm 1$, então é verdade que:

a) $\boldsymbol{A - B = 1}$
b) $A < B$
c) $A.B = 3/2$
d) $A + B = 1$
e) $\frac{A}{B} = \frac{3}{4}$

Resolução (Método M1) :

O problema pode ser resolvido de modo imediato utilizando-se o método de resolução **M1**.

$$\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Realizando a **soma** das frações do segundo membro da equação, temos:

$$\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1}$$

$$\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1}$$

Assim, temos duas frações com o mesmo denominador, decorre que essas frações também têm necessariamente o mesmo numerador e, portanto, temos a seguinte igualdade de polinômios, de acordo com a **definição 3,** temos que:

$$2x + 1 = (A+B)x + A - B$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ A - B = 1 \end{cases}$$

Observando a segunda equação, automaticamente já encontramos a seguinte relação.

$$\boxed{A - B = 1} \ .$$

Resposta correta: **Alternativa a) .**

A seguir, as aplicações de 10 a 15, trata-se de decomposições de fatores lineares quadráticos irredutíveis distintos.

Aplicação 10: (FATEC – SP) Se $\boldsymbol{A, B\ e\ C}$ são números reais, tais que

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x(x^2+2x+2)}$$

Para todo $x, x \in \mathbb{R}^*$, calcule o valor de $\boldsymbol{A+\ B+\ C}$**.**

a) - 2
b) - 1
c) 1
d) 2
e) 3

Resolução (Método M1):

Seja

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}=\frac{1}{x(x^2+2x+2)} \quad .$$

Realizando a **soma** entre as frações do primeiro membro da equação podemos reescrever e expressão dada do seguinte modo:

$$\frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)x}{x(x^2+2x+2)}=\frac{1}{x(x^2+2x+2)}$$

Realizando a distributiva dos termos A e x, temos:

$$\frac{Ax^2+2Ax+2A+Bx^2+Cx}{x(x^2+2x+2)}=\frac{1}{x(x^2+2x+2)}$$

Colocando os fatores comuns em evidência.

$$\frac{(A+B)x^2+(2A+C)x+2A}{x(x^2+2x+2)}=\frac{1}{x(x^2+2x+2)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$(A+B)x^2+(2A+C)x+2A=1$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 2A = 1 \end{cases}$$

Assim, encontramos o valor de $A = \frac{1}{2}$, e pela primeira equação temos que $B = -\frac{1}{2}$.

Substituindo o valor de A, na segunda equação, encontraremos:

$$2A + C = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + C = 0 \quad \therefore \quad \mathrm{C} = -1 \ \ .$$

Daí, valor de $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ será:

$$\boxed{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = -1} \ .$$

Resposta correta: **Alternativa b) .**

Aplicação 11: (U.C. – MG) A soma dos valores de $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{C}$**,** tal que

$$\frac{2x - 3}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução:

Temos

$$\frac{2x - 3}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

Somando – se as frações do segundo membro da equação, temos:

$$\frac{2x - 3}{x^3 + x} = \frac{A(x^2 + 1) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 1)}$$

Realizando a distributiva dos termos A e x, temos:

$$\frac{2x - 3}{x^3 + x} = \frac{Ax^2 + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)}$$

Colocando os fatores comuns em evidência, resulta em:

$$\frac{2x-3}{x^3+x} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, obtemos:

$$2x-3 \; = (A+B)x^2+Cx+A$$

A fim de utilizar o método **M1**, formamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=2 \\ A=-3 \end{cases}$$

Daí, imediatamente encontramos os valores dos coeficientes.

Portanto, a soma dos valores de $\boldsymbol{A, B \; e \; C}$ será:

$$\boxed{A+B+C=2} \quad .$$

Resposta correta: **Alternativa c)**

Aplicação 12: (CEFET – MG 2013) Perdeu – se parte da informação que constava em uma solução de um problema, pois o papel foi rasgado e faz – se necessário encontrar três números perdidos que chamaremos de $\boldsymbol{A \; , B \; e \; C}$ na equação abaixo.

$$\frac{Ax-2}{x^2+x+3} + \frac{B}{2x-1} = \frac{Cx^2-9x-C}{2x^3+x^2+5x-3}$$

O valor de $\boldsymbol{A} + \; \boldsymbol{B} + \; \boldsymbol{C}$ é:

a) -2
b) -3
c) 4
d) 5
e) 7

Resolução (Método M1):

Utilizando o método de resolução **M1**,

$$\frac{Ax-2}{x^2+x+3}+\frac{B}{2x-1}=\frac{Cx^2-9x-C}{2x^3+x^2+5x-3}$$

Realizaremos a **soma** entre as frações do primeiro membro da equação

$$\frac{(Ax-2)(2x-1)+B(x^2+x+3)}{(x^2+x+3)(2x+1)}=\frac{Cx^2-9x-C}{(x^2+x+3)(2x+1)}$$

De acordo com o **teorema 3**, podemos escrever o numerador do seguinte modo:

$$\frac{2Ax^2-Ax-4x+2+Bx^2+Bx+3B}{(x^2+x+3)(2x+1)}=\frac{Cx^2-9x-C}{(x^2+x+3)(2x+1)}$$

Colocando os fatores comuns em evidência, temos:

$$\frac{(A+B)x^2+(-A-4+B)x+2+3B}{(x^2+x+3)(2x+1)}=\frac{Cx^2-9x-C}{(x^2+x+3)(2x+1)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$(A+B)x^2+(-A-4+B)x+2+3B=Cx^2-9x-C$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=C \\ -A+B-4=9 \\ 3B+2=-C \end{cases}$$

Daí, organizando o sistema colocando a incógnita C para o primeiro membro e os números para o segundo, temos:

$$\begin{cases} A+B-C=0 \\ -A+B=-5 \\ 3B+C=-2 \end{cases}$$

Resolveremos o sistema acima pelo método de escalonamento, de acordo com a **definição 16;**

$$\begin{cases} A+B-C=0 \\ -A+B+0C=-5 \\ 0A+3B+C=-2 \end{cases}$$

Subtraindo da segunda equação a primeira multiplicada por $-\frac{1}{2}$, resulta:

$$\begin{cases} 2A + B - C = 0 \\ 0A + \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C = -5 \\ 0A + 3B + C = -2 \end{cases}$$

Subtraindo da terceira equação a segunda multiplicada por 2, temos:

$$\begin{cases} 2A + B - C = 0 \\ 0A + \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C = -5 \\ 0A + 0B + 2C = 8 \end{cases}$$

O sistema acima se encontra na forma escalonada que satisfaz a **Definição 16,** e que pode ser representado simplesmente por:

$$\begin{cases} 2A + B - C = 0 \\ \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}C = -5 \\ 2C = 8 \end{cases}$$

Logo, $C = 4$. Substituindo o valor do coeficiente C na segunda equação, encontraremos B.

$$\frac{3}{2}B - \frac{1}{2} \cdot 4 = -5 \ \therefore \ \frac{3}{2}B = -5 + 2 \ \therefore \ B = -2 \ .$$

E por fim, substituindo os valores de C e B na primeira equação, encontraremos A:

$$2A + B - C = 0$$

$$2A - 2 - 4 = 0$$

$$2A = 6 \quad \therefore \ A = 3 \ .$$

Com isso, os valores de A, B e C , são respectivamente, 3, - 2 e 4.

Portanto, o valor de $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ é:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = 3 - 2 + 4$$

$$\boxed{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = 5} \ .$$

Resposta correta: **Alternativa d) .**

Aplicação 13: (FUVEST – SP) As constantes $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{D}$ são tais que a igualdade

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+C}{x^2+4}$$

É válida para todo $x \in \mathbb{R}$, O valor de $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}$ é:

a) $\frac{1}{10}$

b) $\boldsymbol{\frac{2}{10}}$

c) $\frac{3}{10}$

d) $\frac{4}{10}$

e) $\frac{5}{10}$

Resolução (Método M1) :

Seja

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Dx+C}{x^2+4}$$

Realizando a **soma** entre as frações do segundo membro da equação.

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{(Ax+B)(x^2+4)+(Dx+C)(x^2+2x+2)}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}$$

De acordo com o **teorema 3**, podemos escrever o numerador do seguinte modo:

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{Ax^3+4Ax+Bx^2+4B+Dx^3+2Dx^2+2Dx+Cx^2+2Cx+2C}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}$$

Assim, organizando os termos semelhantes.

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{Ax^3+Dx^3+Bx^2+2Dx^2+Cx^2+4Ax+2Dx+2Cx+4B+2C}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}$$

Colocando em evidência os termos com x^3, x^2 e x.

$$\frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2+4)} = \frac{(A+D)x^3+(B+2D+C)x^2+(4A+2D+2C)x+4B+2C}{(x^2+2x+2)(x^2+4)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$1 = (A+D)x^3+(B+2D+C)x^2+(4A+2D+2C)x+4B+2C$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ B + 2D + C = 0 \\ 4A + 2D + 2C = 0 \\ 4B + 2C = 1 \end{cases}$$

Resolveremos o sistema acima pelo **método de escalonamento**, de acordo com a **definição 16;**

$$\begin{cases} A + 0B + 0C + D = 0 \\ 0A + B + C + 2D = 0 \\ 4A + 0B + 2C + 2D = 0 \\ 0A + 4B + 2C + 0D = 1 \end{cases}$$

Subtraindo da terceira equação a primeira equação multiplicada por 4.

$$\begin{cases} A + 0B + 0C + D = 0 \\ 0A + B + C + 2D = 0 \\ 0A + 0B + 2C - 2D = 0 \\ 0A + 4B + 2C + 0D = 1 \end{cases}$$

Subtraindo da quarta equação a segunda equação multiplicada por 4

$$\begin{cases} A + 0B + 0C + D = 0 \\ 0A + 1B + 1C + 2D = 0 \\ 0A + 0B + 2C - 2D = 0 \\ 0A + 0B - 2C - 8D = 1 \end{cases}$$

Subtraindo da quarta equação a terceira equação multiplicada por -1 .

$$\begin{cases} A + 0B + 0C + D = 0 \\ 0A + 1B + 1C + 2D = 0 \\ 0A + 0B + 2C - 2D = 0 \\ 0A + 0B + 0C - 10D = 1 \end{cases}$$

O sistema acima se encontra na forma escalonada que satisfaz a **Definição 16,** e que pode ser representado simplesmente por:

$$\begin{cases} A + D = 0 \\ 1B + 1C + 2D = 0 \\ +2C - 2D = 0 \\ -10D = 1 \end{cases}$$

Logo, $D = -\frac{1}{10}$. Substituindo o valor do coeficiente D na terceira equação, encontraremos C.

$$2C - 2D = 0$$

$$2C - 2\left(-\frac{1}{10}\right) = 0$$

$$2C + \frac{2}{10} = 0$$

$$20C + 2 = 0 \quad \therefore \ C = -\frac{1}{10} \ .$$

Para encontrarmos o valor do coeficiente B, substituiremos os valores encontrados de D e C na segunda equação.

$$B + C + 2D = 0$$

$$B - \frac{1}{10} + 2\left(-\frac{1}{10}\right) = 0$$

$$B - \frac{1}{10} - \frac{2}{10} = 0 \quad \therefore \quad B = \frac{3}{10} \quad .$$

E, por fim, para encontrarmos o valor do coeficiente A basta observamos a primeira equação como $A + D = 0$ então $A = -D$ então $A = -\left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{10}$.

Daí, o valor de $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}$ será:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} - \frac{1}{10}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} = \cancel{\frac{1}{10}} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10} - \cancel{\frac{1}{10}}$$

Temos, portanto, a resposta para o problema.

$$\boxed{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} = \frac{2}{10}} \quad .$$

Resposta correta: **Alternativa b) .**

Aplicação 14: (AFA) O valor da expressão $\boldsymbol{A^2 - 2B + C}$**,** de modo que seja verificada a igualdade

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

É:

a) $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{-4}{3}$

d) $\frac{-3}{4}$

e) 1

Resolução (Método M1):

A fim de utilizar o método **M1** como resolução desta aplicação, seja:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Realizando a soma do segundo membro da equação, temos:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x^2+1)(x-1)}$$

De acordo com o **teorema 3**, podemos escrever o numerador do seguinte modo:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2-Bx+Cx-C}{(x^2+1)(x-1)}$$

Assim, organizando os termos semelhantes.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax^2+Bx^2-Bx+Cx+A-C}{(x^2+1)(x-1)}$$

Colocando em evidência os termos com x^2 e x.

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x^2+(-B+C)x+A-C}{(x^2+1)(x-1)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$1 = (A+B)x^2+(-B+C)x+A-C$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B + C = 0 \\ A - C = 1 \end{cases} .$$

Resolveremos o sistema acima pelo **método de escalonamento**, de acordo com a **definição 16;**

$$\begin{cases} A + B + 0C = 0 \\ 0A - B + C = 0 \\ A + 0B - C = 1 \end{cases} .$$

Subtraindo da terceira equação a primeira multiplicada por 1, temos:

$$\begin{cases} A + B + 0C = 0 \\ 0A - B + C = 0 \\ A - B - C = 1 \end{cases} .$$

Subtraindo da terceira equação a segunda multiplicada por 1, temos:

$$\begin{cases} A + B + 0C = 0 \\ 0A - B + C = 0 \\ 0A - 0B - 2C = 1 \end{cases} .$$

O sistema acima se encontra na forma escalonada que satisfaz a **Definição 16,** e que pode ser representado simplesmente por:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -B + C = 0 \\ -2C = 1 \end{cases} .$$

Observando a terceira equação encontramos o valor da incógnita $C = -\frac{1}{2}$.

Substituindo esse valor na segunda equação, temos:

$$-B + C = 0$$

$$-B - \frac{1}{2} = 0 \ \therefore \ B = -\frac{1}{2} \ .$$

Por fim, para encontrarmos o valor da incógnita A, substituiremos na primeira equação.

$$A + B = 0$$

$$A - \frac{1}{2} = 0 \quad \therefore \ A = \frac{1}{2} \ .$$

Daí, o valor da expressão $\boldsymbol{A^2 - 2B + C}$ será:

$$\boldsymbol{A^2 - 2B + C} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{A^2 - 2B + C} = \frac{1}{4} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2}$$

Multiplicando as duas últimas frações pelo número 2, para igualarmos os denominadores, temos:

$$\boldsymbol{A^2 - 2B + C} = \frac{1}{4} + \frac{4}{4} - \frac{2}{4}$$

Portanto, temos a solução do problema:

$$\boxed{\boldsymbol{A^2 - 2B + C} = \tfrac{3}{4}}\ .$$

Resposta correta: **Alternativa a) .**

Aplicação 15: (ITA) A identidade

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

é válida para todo número real $x \neq -1$. Então $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ é igual a:

a) 5
b) 4
c) 3
d) **2**
e) 1

Resolução (Método M2):

Seja

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Nesse caso em especial, temos um número antes da decomposição, sendo assim conseguimos escrever esse número 1, na seguinte forma:

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = \frac{x^3+1}{x^3+1} + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

E consequentemente, fatorando a fração em destaque, temos:

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

Somando a segunda e terceira fração,

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Como as frações do segundo membro da equação possuem o mesmo denominador então de acordo com a **Definição 8**, temos:

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)+A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

De acordo com o **teorema 3**, podemos escrever o numerador do seguinte modo:

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = \frac{x^3+1+Ax^2-Ax+A+Bx^2+Bx+Cx+C}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Assim, organizando os termos semelhantes.

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = \frac{x^3+Ax^2+Bx^2-Ax+Bx+Cx+A+C+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Colocando em evidência os termos com x^2 e x, temos:

$$\frac{x^3+4}{x^3+1} = \frac{x^3+(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C+1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$x^3+4 = x^3+(A+B)x^2+(-A+B+C)x+A+C+1$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C+1=4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema pelo **método da comparação**, para isso, temos que isolar na primeira equação o valor de B.

$$A+B=0 \quad \therefore \quad B=-A \ .$$

Com isso, substituindo na segunda equação, temos:

$$-A+B+C=0$$

$$-A-\mathrm{A}+C=0$$

$$-2A+C=0 \ .$$

Assim,

$$\begin{cases} -2A+C=0 \\ A+C=3 \end{cases}$$

Isolando a incógnita C na primeira equação, temos: $C=2\mathrm{A}$.

Isolando a mesma incógnita na segunda equação, encontramos: $C=3-\mathrm{A}$.

A incógnita C possui o mesmo valor na primeira e segunda equação, é correto igualar.

$$2\mathrm{A}=3-\mathrm{A} \quad \therefore \quad 3\mathrm{A}=3 \quad \therefore \quad \mathrm{A}=1 \ .$$

Como, $C = 2\text{A} \therefore \text{C} = 2$. Para encontrar o valor da incógnita B, observando a primeira equação do sistema $B = -A \therefore B = -1$.

Portanto,

$$\boxed{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = 2}\ .$$

Resposta correta: **Alternativa d)**

Aplicação 16: (IF – PI 2022) Uma solução para a integral indefinida $\int \frac{x-3}{x^3-x^2-2x}dx$ está na alternativa:

a) $ln\left|\frac{Cx^6}{(x-2)^2(x+1)^3}\right|$

b) $\boldsymbol{\frac{1}{6}ln\left|\frac{Cx^9}{(x-2)(x+1)^8}\right|}$

c) $\frac{1}{4}ln\left|\frac{Cx^8}{(x-2)(x+1)^9}\right|$

d) $\frac{1}{6}ln\left|\frac{Cx^6}{(x-2)(x+1)^9}\right|$

e) $\frac{1}{4}ln\left|\frac{Cx^9}{(x-2)(x+1)^6}\right|$

Resolução (Método M1):

Seja o denominador da integral o trinômio $x^3 - x^2 - 2x$, de acordo com a **Definição 5**, esse trinômio é irredutível. Colocando x em evidência temos:

$$x(x^2 - x - 2) = x(x + 1)(x - 2)$$

Como temos três fatores distintos, essa decomposição conforme já exemplificado anteriormente é do **1ºcaso.**

Sendo assim, existem constantes A, B e C tais que:

$$\frac{x-3}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

Realizando a **soma** entre as três frações do segundo membro, temos:

$$\frac{x-3}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)}{x(x+1)(x-2)}$$

De acordo com o **teorema 3**, podemos escrever o numerador da seguinte maneira:

$$\frac{x-3}{x(x+1)(x-2)} = \frac{Ax^2 - Ax - 2A + Bx^2 - 2Bx + Cx^2 + Cx}{x(x+1)(x-2)}$$

Colocando em evidência os termos acompanhados de x^2 e x.

$$\frac{x-3}{x(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A}{x(x+1)(x-2)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$x - 3 = (A+B+C)x^2 + (-A-2B+C)x - 2A$$

A fim de utilizar o **M1,** para a resolução dessa questão formaremos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A-2B+C=1 \\ -2A=-3 \end{cases}$$

Resolveremos o sistema acima pelo **método de escalonamento**, de acordo com a **definição 16;**

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -A-2B+C=1 \\ -2A+0B+0C=-3 \end{cases}$$

Subtraindo da segunda equação a primeira multiplicada por -1, temos:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 0A-1B+2C=1 \\ -2A+0B+0C=-3 \end{cases}$$

Subtraindo da terceira equação a primeira multiplicada por -2:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 0A-1B+2C=1 \\ 0A+2B+2C=-3 \end{cases}$$

Subtraindo da terceira equação a segunda multiplicada por -2:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 0A-1B+2C=1 \\ 0A+0B+6C=-1 \end{cases}$$

O sistema acima se encontra na forma escalonada satisfazendo assim a **Definição 16,** e pode ser representado simplesmente por:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ -B+2C=1 \\ 6C=-1 \end{cases}.$$

Assim, encontramos o valor da incógnita $C = -\frac{1}{6}$.

Substituindo na segunda equação o valor de C, encontraremos B.

$$-B + 2C = 1$$

$$-B + 2\left(-\frac{1}{6}\right) = 1$$

$$-B - \frac{1}{3} = 1 \quad \therefore \quad B = -\frac{4}{3} \quad .$$

Por fim, substituindo na primeira equação os valores de C e B , encontraremos A.

$$A + B + C = 0$$

$$A - \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = 0$$

$$A = \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = \frac{9}{6} \quad \therefore \quad A = \frac{3}{2} \quad .$$

Então, conseguimos escrever a decomposição da função integrante na seguinte forma:

$$\frac{x-3}{x(x+1)(x-2)} = \frac{\frac{3}{2}}{x} + \frac{-\frac{4}{3}}{x+1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x-2}$$

Portanto,

$$\int \frac{x-3}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \int \frac{\frac{3}{2}}{x} dx + \int \frac{-\frac{4}{3}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{6}}{x-2} dx$$

$$\int \frac{x-3}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int \frac{1}{x-2} dx$$

$$\int \frac{x-3}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \frac{9}{6} ln|x| - \frac{8}{6} ln|x+1| - \frac{1}{6}\, ln|x-2| + k \quad .$$

$$\int \frac{x-3}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \frac{1}{6} [ln|x|^9 - ln|x+1|^8 - \, ln|x-2| + ln|c| \;]$$

$$\int \frac{x-3}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \frac{1}{6} \left[ln \left| \frac{x^9}{x+1^8} \right| + ln \left| \frac{c}{x-2} \right| \;\right]$$

$$\int \frac{x-3}{x^3 - x^2 - 2x} dx = \frac{1}{6} \left[ln \left| \frac{c.x^9}{(x+1^8)(x-2)} \right| \right]$$

Resposta correta: **Alternativa b) .**

Aplicação 17: (IF – MT 2020) O resultado da integral definida $\int_3^4 \frac{x-9}{(x+5)(x-2)} dx$ é:

a) $4\ln(3) + \ln(2) - 6\ln(2)$

b) $\ln\left(\frac{81}{64}\right)$

c) $9\ln(27) - \ln(2) - 6\ln(2)$

d) $\ln\left(\frac{27}{64}\right)$

e) $\mathbf{4\ln(3) - \ln(2) - 6\ln(2)}$

Resolução (Método M1) :

Seja função integrante

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)}$$

Observamos que no denominador da função possui os fatores $(x+5)$ e $(x-2)$ acordo com o **1ºcaso** de decomposição, esses fatores são lineares e distintos, com isso encontraremos as constantes A e B tais que satisfaça a seguinte condição:

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2}$$

Realizando a soma entre as frações do segundo membro da equação, temos:

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)}$$

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \frac{Ax-2A+Bx+5B}{(x+5)(x-2)}$$

Assim, organizando os termos semelhantes;

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \frac{Ax+Bx-2A+5B}{(x+5)(x-2)}$$

Colocando em evidência os termos com x;

$$\frac{x-9}{(x+5)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A+5B}{(x+5)(x-2)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$x - 9 = (A + B)x - 2A + 5B$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + 5B = -9 \end{cases}$$

Resolveremos o sistema acima pelo **método de escalonamento**, de acordo com a **definição 16;**

Subtraindo da segunda equação a primeira multiplicado por -2, temos:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 0A + 7B = -7 \end{cases}$$

Logo, $B = -1$. Substituindo esse valor na primeira equação encontraremos a incógnita A **.**

$$A + B = 1$$

$$A - 1 = 1 \quad \therefore \ \mathrm{A} = \ 2 \ .$$

Substituindo os valores encontrados na equação inicial, temos:

$$\frac{x - 9}{(x + 5)(x - 2)} = \frac{2}{x + 5} + \frac{-1}{x - 2}$$

Sendo assim, podemos reescrever a integral da seguinte maneira.

$$\int_3^4 \left(\frac{2}{x + 5} + \frac{-1}{x - 2} \right) dx$$

Utilizando a soma das integrais,

$$\int_3^4 \frac{2}{x + 5} dx^{(*)} + \int_3^4 \frac{-1}{x - 2} dx^{(**)}$$

Resolvendo a integral $(*)$**,** temos:

$$\int_3^4 \frac{2}{x + 5} dx = 2 \int_3^4 \frac{1}{x + 5} dx = 2\ln(x + 5)\,|_3^4 = 2\ln(4 + 5) - 2\ln(3 + 5) = 2\ln(9) - 2\ln(8) \, .$$

Resolvendo a integral $(**)$**,** temos:

$$\int_3^4 \frac{-1}{x - 2} dx = \ln(x - 2)\,|_3^4 = \ln(4 - 2) + \ln(3 - 2) = \ln(2) + \ln(1) \quad .$$

Realizando $(*) - (**)$

$$2\ln(9) - 2\ln(8) - [\ln(2) + \cancel{\ln(1)}]$$

$$2\ln(9) - 2\ln(8) - \ln(2) - \ln(1)$$

Utilizando a propriedade do $\ln$,

$$\ln(9)^2 - \ln(8)^2 - \ln(2)$$

Resolvendo a potência

$$\ln(81) - \ln(64) - \ln(2)$$

Fatorando os números 81 e 64, obtemos respectivamente 3^4 e 2^6 substituindo esses valores, temos:

$$\ln(3)^4 - \ln(2)^6 - \ln(2)$$

Sendo assim, aplicando novamente a propriedade do expoente do $\ln$, temos como resposta:

$$\boxed{4\ln(3) - 6\ln(2) - \ln(2)}\ .$$

Resposta correta: **Alternativa e) .**

Aplicação 18: (IF – MT 2014) Assinale a transformada de Laplace inversa $f(t)$ para a função de transferência $F(s)$ apresentada no domínio da frequência dada por $F(s) = \frac{32}{s(s^2+32s+32)}$.

a) $\boldsymbol{(1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}),\ para\ t \geq 0}$

b) $(1 - e^{-4t} + 2e^{-8t}),\ para\ t \geq 0$

c) $(1 - 4e^{-2t} + e^{8t}),\ para\ t \geq 0$

d) $(1 - 2e^{-2t} + e^{8t}),\ para\ t \geq 0$

Resolução (Método M2) :

Antes de iniciarmos a resolução, observamos o denominador de $F(s)$ que é o trinômio $s^2 + 32s + 32$ de acordo com a **Definição 5**, conseguimos escrever o polinômio na forma $(s+4)(s+8)$ reescrevendo a função de transferência, temos:

$$\frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

De acordo com o **1ºcaso** de decomposição esses fatores são lineares distintos, então existem constantes A, B e C que satisfaz a seguinte condição:

$$\frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+8}$$

A fim de utilizar o método **M2** como resolução desta aplicação, primeiramente encontrarmos o valor do coeficiente A.

$$\frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+8}$$

Para isso, temos que observar o valor que zera o denominador da fração em destaque, da equação acima.

Facilmente observamos que, para o denominador zerar, o valor de s tem que ser igual a zero. Assim, substituindo no primeiro membro da equação, o valor de s igual a zero, desconsiderando o denominador s , temos:

$$\frac{32}{(s+4)(s+8)} = \frac{32}{(0+4)(0+8)} = \frac{32}{(4)\cdot(8)} = \frac{32}{32} = 1 \quad \therefore \quad A = 1 \ .$$

Para encontrarmos o coeficiente B, com a mesma ideia iremos observar, o valor que faz zerar o denominador que se encontra o coeficiente, observe abaixo a fração em destaque.

$$\frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+8}$$

Como o denominador é o fator $s+4$, para que o denominador seja zero o valor de s tem que ser igual a -4. Assim, substituindo o valor de -4 no primeiro membro, desconsiderando o fator que estamos analisando que é $s+4$, temos:

$$\frac{32}{s(s+8)} = \frac{32}{(-4)(-4+8)} = \frac{32}{(-4)(+4)} = \frac{32}{-16} = -2 \ \therefore B = -2 \ .$$

E por fim, para encontrarmos o valor do coeficiente C, substituiremos no primeiro membro da equação o valor de s igual a -8, devemos desconsiderar o fator que estamos observando.

$$\frac{32}{s(s+4)} = \frac{32}{(-8)(-8+4)} = \frac{32}{(-8)(-4)} = \frac{32}{32} = 1 \quad \therefore \quad C = 1 \ .$$

Portanto, o valor dos coeficientes são $A = C = 1$ e $B = -2$.

Sendo assim, podemos escrever $F(s)$, na seguinte forma:

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{-2}{s+4} + \frac{1}{s+8}$$

E, pelo **teorema 8,** temos.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{32}{s(s+4)(s+8)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{-2}{s+4} + \frac{1}{s+8}\right\}$$

A transformada de Laplace inversa é uma transformada linear, então:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{32}{s(s+4)(s+8)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - 2.\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+8}\right\}$$

Logo,

$$\boxed{f(t) = 1 - 2e^{-4t} + e^{-8t}} \quad .$$

Resposta correta: **Alternativa a) .**

Aplicação 19: (CESGRANRIO 2023) Sabe – se que a transformada de Laplace da função: $f(t) = e^{at}$, para $t \geq 0$, onde a é uma constante Real, é $F(s) = \frac{1}{s-a}$.

Aplicando – se as propriedades da Transformada de Laplace, a Transformada Inversa de $G(s) = \frac{1}{s^2-5s+6}$, para $t \geq 0$, é:

a) $G(t) = e^{2t} + e^{3t}$
b) $G(t) = e^{-2t} + e^{-3t}$
c) $G(t) = e^{2t} - e^{3t}$
d) $\mathbf{G(t) = e^{3t} - e^{2t}}$
e) $G(t) = e^{3t} + e^{t}$

Resolução (Método M1) :

Seja o denominador da função $G(s) = s^2 - 5s + 6$, de acordo com a **definição 5,** esse trinômio é redutível pode ser escrito na forma $G(s) = (s-2)(s-3)$. Com isso, utilizando o **1°caso** de decomposição com base no **teorema 4**, existem únicas constantes $A\ e\ B$ tais que:

$$\frac{1}{s^2 - 5s + 6} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

Realizando a soma do segundo membro da equação, temos:

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A(s-3) + B(s-2)}{(s-2)(s-3)}$$

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{As - 3A + Bs - 2B}{(s-2)(s-3)}$$

Colocando em evidência os termos com s

$$\frac{1}{(s-2)(s-3)} = \frac{(A+B)s - 3A - 2B}{(s-2)(s-3)}$$

Como os polinômios possuem o mesmo denominador de acordo com a **Definição 3**, temos que:

$$1 = (A+B)s - 3A - 2B$$

Com isso aplicando o **M1**, formaremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -3A - 2B = 1 \end{cases}$$

Resolveremos o sistema acima pelo **método da adição,** para isso multiplicaremos a primeira equação por 2.

$$\begin{cases} 2A + 2B = 0 \\ -3A - 2B = 1 \end{cases}$$

Somando-se as duas equações, encontraremos o valor da incógnita A.

$$-A = 1 \;\therefore\; A = -1\ .$$

Substituindo o valor de A, na primeira equação inicial, temos:

$$A + B = 1$$

$$-1 + B = 1 \quad \therefore B = 2\ .$$

Logo, substituindo os valores encontrados na equação, podemos escrever a decomposição na forma.

$$\frac{1}{s^2 - 5s + 6} = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

E assim, pelo **teorema 8,** temos.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 5s + 6}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}\right\}$$

Por fim, pela definição, a transformada de Laplace inversa é uma transformada linear, então:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s+6}\right\} = -1\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-5s+6}\right\} = -1e^{2t} + e^{3t}} \quad .$$

Resposta correta: **Alternativa d) .**

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho foi possível abordar os aspectos históricos, as definições, teoremas e as demonstrações matemáticas necessárias para o desenvolvimento dos casos das decomposições das frações parciais e aplicações com questões de avaliações a nível nacional.

No entanto, por esse tema ser amplo com aplicações em outras disciplinas, e com grau de dificuldades diferentes, a escolha das aplicações se manteve na coerência de utilizar os métodos abordados nesse trabalho aplicando nas questões de vestibulares e concursos.

Portanto, houve uma contribuição para os diversos níveis de ensino, que abordam esse assunto, pois pouco é explicado, e geralmente as aplicações encontradas na maioria dos livros é de um nível mais fácil que os apresentados nesse trabalho.

Entretanto, e importante observar que o estudo das frações parciais, pode ser abordado em outra disciplina, como na física, além de aplicações em problemas que envolve circuitos elétricos, massa mola entre outros. Sendo assim, essa temática pode dar uma outra extensão de pesquisa para futuros alunos que queiram dar continuidade na proposta da pesquisa, e abordando outros métodos de resolução e aplicação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GIL, Antonio Carlos**. Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto**. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Ed. Edgarg Blucher, 1996.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, volume 2. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos da Aritmética**. São Paulo, SP: Atual, 1991.

PAIVA, Manuel Rodrigues. **Matemática: Conceitos, Linguagem e aplicações**. Volume 2. Moderna, 2003

IEZZI, Gelson. **Matemática ciência e aplicações.** Volume 2 e 3. Ed. Saraiva, 2019.

Zill, Dennis G. **Equações Diferenciais**, volume 1. Ed. Pearson Makron Books, 2001.

BIANCHINNI, EDWALDO. **Curso de Matemática**, volume 2. Ed. Moderna 1998.

TONIDANDEL, DANNY. **Transformada de Laplace: Uma obra de engenharia**. Revista Brasileira de Ensino de Física, Belo Horizonte, Minas Gerais, v. 34, n. 2, pp.1 até 6, abril, 2012.