

Vitoriano Medeiros Casas

# **Projeto e Controle de um Pêndulo Invertido Rotacional**

Brasil

2024

Vitoriano Medeiros Casas

## **Projeto e Controle de um Pêndulo Invertido Rotacional**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca avaliadora do curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Estado do Amazonas como pré-requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Universidade do Estado do Amazonas – UEA

Escola Superior de Tecnologia – EST

Engenharia de Controle e Automação

Orientador: Rodrigo Farias Araújo

Brasil

2024

## Ficha Catalográfica

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).  
**Sistema Integrado de Bibliotecas da Universidade do Estado do Amazonas.**

C335pp Casas, Vitoriano Medeiros  
Projeto e controle de um pêndulo invertido rotacional  
/ Vitoriano Medeiros Casas. Manaus : [s.n], 2024.  
51 f.: color.; 30 cm.

TCC - Graduação em Engenharia de Controle e  
Automação; - Universidade do Estado do Amazonas,  
Manaus, 2024.

Inclui bibliografia

Orientador: Rodrigo Farias Araújo

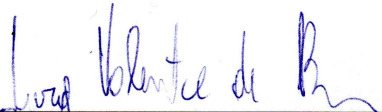
1. pêndulo. 2. Lyapunov. 3. LMI. 4. controle  
discreto. I. Rodrigo Farias Araújo (Orient.). II.  
Universidade do Estado do Amazonas. III. Projeto e  
controle de um pêndulo invertido rotacional

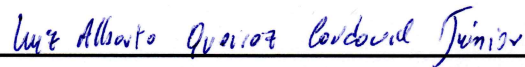
Vitoriano Medeiros Casas

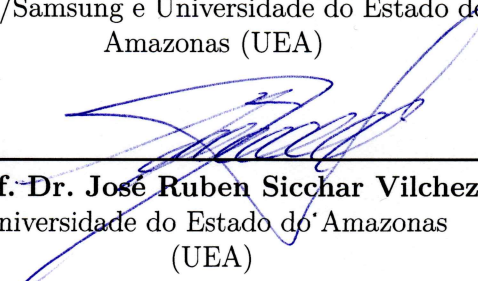
## Projeto e Controle de um Pêndulo Invertido Rotacional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca avaliadora do curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola Superior de Tecnologia da Universidade do Estado do Amazonas como pré-requisito para obtenção do título de Engenheiro de Controle e Automação.

Trabalho aprovado. Brasil, 28 de fevereiro de 2024:

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Iury Valente de Bessa**  
Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. Luiz Alberto Queiroz  
Cordovil Júnior**  
Sidia/Samsung e Universidade do Estado do  
Amazonas (UEA)

  
\_\_\_\_\_  
**Prof. Dr. José Ruben Sicchar Vilchez**  
Universidade do Estado do Amazonas  
(UEA)

Brasil  
2024

# Agradecimentos

A Deus, por ter me dado saúde e determinação para alcançar meus objetivos.

Aos meus pais e meu irmão por terem me incentivado e apoiado durante meu percurso na faculdade. Com todo o auxílio dado a mim por minha família foi possível concluir mais uma etapa de minha vida.

Aos amigos antigos e novos, principalmente àqueles que fiz durante o curso e puderam acompanhar minha jornada, além de me ajudarem em momentos de dificuldade.

Aos professores do curso de Engenharia de Controle e Automação. Especialmente ao meu orientador, professor Rodrigo Farias Araújo, por ter aceitado conduzir este trabalho.

A todos que de alguma forma puderam ajudar no desenvolvimento desse trabalho.

A Universidade do Estado do Amazonas por me oferecer a oportunidade de cursar o ensino superior.

*“Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação. (Carl Friedrich Gauss)”*

# Resumo

A modelagem e o controle de sistemas não-lineares dependem de métodos apropriados. Grande parte dos sistemas reais são não-lineares e necessitam de métodos capazes de contornar essas não-linearidades para que possam ser aproveitados em diferentes aplicações. A linearização em torno do ponto de operação é um recurso muito utilizado quando se deseja aproximar a dinâmica do modelo não linear e fazer uso de controladores lineares. A aplicação de controle em sistemas reais também depende da discretização do modelo para que uma lei de controle discreto possa ser projetada. Isso se deve ao fato que os controladores projetados são implementados em computadores os quais recebem sinais de grandezas reais em valores discretos. Nesse trabalho consta a metodologia de construção de sistema dinâmico real do tipo pêndulo invertido rotacional, a descrição do modelo contínuo, o processo de linearização e discretização do modelo e o projeto de controlador digital. A lei de controle é encontrada pelo método da estabilidade de Lyapunov utilizando desigualdades matriciais lineares.

**Palavras-chave:** pêndulo, Lyapunov, LMI, controle discreto.

# Abstract

The modeling and control of nonlinear systems depend on appropriate methods. A large portion of real systems are nonlinear and require methods capable of overcoming these nonlinearities so that they can be used in different applications. Linearization around the operating point is a widely used resource when you want to approximate the dynamics of the non-linear model and make use of linear controllers. The application of control to real systems also depends on the discretization of the model so that a discrete control law can be designed. This is due to the fact the controllers designed are implemented in computers which receive signals from real quantities in discrete values. This work includes the methodology for building a real dynamic system of the rotational inverted pendulum type, the description of the continuous model, the process of linearizing and discretizing the model and the design of the digital controller. The control law is found by the Lyapunov stability method using linear matrix inequalities.

**Keywords:** pendulum, Lyapunov, LMI, discrete control.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema de um pêndulo invertido rotacional . . . . .	13
Figura 2 – Diagrama de blocos de controle de sistema amostrado. . . . .	19
Figura 3 – Projeto de sistema com realimentação das variáveis de estado. . . . .	23
Figura 4 – Padrões de sinais da trilha do disco codificador incremental. . . . .	26
Figura 5 – Codificador incremental industrial. . . . .	27
Figura 6 – Codificador magnético AS5600. . . . .	28
Figura 7 – Sequência de passos. . . . .	29
Figura 8 – Curva torque-velocidade do motor de passo. . . . .	30
Figura 9 – Driver A4988. . . . .	31
Figura 10 – Desenho da estrutura do pêndulo invertido. . . . .	32
Figura 11 – Desenho encaixe para o codificador incremental. . . . .	32
Figura 12 – Motor de passo NEMA 17. . . . .	33
Figura 13 – Arduino Mega 2560. . . . .	33
Figura 14 – Estrutura mecânica final. . . . .	34
Figura 15 – Resposta do ângulo do pêndulo a distúrbio. $T_s = 0,02$ s e motor atuando com 4 micro passos. . . . .	40
Figura 16 – Sinal de controle em torque no distúrbio. $T_s = 0,02$ s e motor atuando com 4 micro passos. . . . .	41
Figura 17 – Sinal de controle em velocidade no distúrbio. $T_s = 0,02$ s e motor atuando com 4 micro passos. . . . .	41
Figura 18 – Resposta do ângulo do pêndulo a distúrbio. $T_s = 0,02$ s e motor atuando com 16 micro passos. . . . .	42
Figura 19 – Sinal de controle em torque. $T_s = 0,02$ s e motor atuando com 16 micro passos. . . . .	42
Figura 20 – Sinal de controle em velocidade. $T_s = 0,02$ s e motor atuando com 16 micro passos. . . . .	43
Figura 21 – Resposta do ângulo do pêndulo a distúrbio. $T_s = 0,04$ s e motor atuando com 4 micro passos. . . . .	44
Figura 22 – Sinal de controle em torque no distúrbio. $T_s = 0,04$ s e motor atuando com 4 micro passos. . . . .	45
Figura 23 – Sinal de controle em velocidade no distúrbio. $T_s = 0,04$ s e motor atuando com 4 micro passos. . . . .	45
Figura 24 – Resposta do ângulo do pêndulo a distúrbio. $T_s = 0,04$ s e motor atuando com 16 micro passos. . . . .	46
Figura 25 – Sinal de controle em torque no distúrbio. $T_s = 0,04$ s e motor atuando com 16 micro passos. . . . .	46

Figura 26 – Sinal de controle em velocidade no distúrbio.  $T_s = 0,04$  s e motor atuando com 16 micro passos. . . . . 47

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>11</b>
1.1.1	Objetivo geral	11
1.1.2	Objetivos específicos	11
<b>1.2</b>	<b>Estrutura do Trabalho</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Pêndulo Invertido Rotacional</b>	<b>13</b>
2.1.1	Modelagem matemática	13
2.1.1.1	Equação de Euler-Lagrange	17
<b>2.2</b>	<b>Sistemas Digitais</b>	<b>18</b>
<b>2.3</b>	<b>Estabilidade de Lyapunov através de LMIs</b>	<b>20</b>
<b>2.4</b>	<b>Realimentação de Estados e o Problema de Regulação</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Projeto de Pêndulo Invertido Rotacional</b>	<b>25</b>
3.1.1	Codificador óptico digital	25
3.1.2	Codificador magnético	27
3.1.3	Motor de passo	28
3.1.4	Estrutura mecânica	30
<b>3.2</b>	<b>Síntese do Sistema de Controle</b>	<b>34</b>
3.2.1	Linearização	34
3.2.2	Controle por Realimentação de Estados baseado em LMIs	36
3.2.3	Questões sobre o Sinal de Controle	38
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>39</b>
<b>4.1</b>	<b>Análise de Estabilidade para <math>T_s = 0,02</math> s</b>	<b>40</b>
<b>4.2</b>	<b>Análise de Estabilidade para <math>T_s = 0,04</math> s</b>	<b>43</b>
<b>4.3</b>	<b>Análise Comparativa</b>	<b>46</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>49</b>
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos Futuros</b>	<b>49</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>51</b>

# 1 Introdução

Os pêndulos são sistemas mecânicos amplamente estudados por apresentarem movimento harmônico simples. O movimento oscilatório surge pela força centrípeta em torno de uma região de equilíbrio. Ao se tratar de um pêndulo invertido, o estudo se volta para a estabilidade em torno de uma região de equilíbrio vertical, porém com a força gravitacional sendo contrária a posição do pêndulo. Existem diversos sistemas que agem de forma similar a um pêndulo invertido, o caso mais notório é o lançamento de foguetes, ou ainda em aplicações de robótica, na estabilidade de robôs humanoides e projetos de monociclos.

Nesse contexto, é visível a importância de estudar modelos físicos do pêndulo invertido e as formas de controlar a estabilidade do sistema na posição vertical para cima. Construir uma planta de pêndulo invertido pode se tornar uma tarefa desafiadora dependendo da configuração de estrutura escolhida. Entender como as forças atuam no sistema completo é fundamental para realização do controle. Este trabalho aborda uma estrutura de pêndulo invertido rotativo também conhecido como pêndulo de Furuta ([CAZZOLATO; PRIME, 2011](#)).

A teoria de controle moderna obteve tremendo sucesso em áreas onde o sistema é bem definido, ou seja, quando se conhece completamente o modelo dinâmico do sistema. No entanto, por mais que se tenha o modelo matemático do sistema, este é não-linear. É o caso do pêndulo invertido rotativo ([PRADO; HERRERA; MENÉNDEZ, 2020](#)).

Outro aspecto está relacionado a implementação prática de sistemas de controle, a qual normalmente é feita em sistemas digitais, como microcontroladores ou computadores. Neste caso, o modelo matemático que descreve o sistema deve ser discretizado, de modo que os dispositivos digitais possam ser utilizados. Contudo, alguns outros fatores surgem e podem influenciar o desempenho dos controladores, destaca-se principalmente a taxa de amostragem em que medidas e sinais de controle são atualizados ([AGUIRRE, 2023](#)).

Existem diferentes estratégias de controle que utilizam o modelo não-linear do sistema de modo a garantir a efetividade do controlador em uma ampla região de operação. Contudo alguns sistemas possuem características que os tornam limitados pela própria estrutura e normalmente irão atuar em torno de uma região de operação. No pêndulo invertido rotacional o controlador irá conseguir atingir sua estabilidade quando a barra do pêndulo estiver em posição vertical para cima onde a força gravitacional estará atuando sobre a junta de apoio do pêndulo. Com isso é possível dizer que a região de operação sempre será em ângulos próximos ao da posição vertical para cima, também chamado de ponto de equilíbrio instável. Quando o pêndulo chega a angulações muito grandes o próprio atuador não será capaz de estabilizá-lo. Sendo assim, podemos aplicar técnicas

de linearização que transformam o modelo não-linear em linear ao mesmo tempo que restringem a validade do modelo matemático a regiões de operação determinadas a priori. Dessa forma, técnicas de controle como realimentação de estados podem ser utilizadas para estabilização do sistema. Este problema é conhecido como *problema de regulação*, em que todas as variáveis do sistema se anulam na posição de equilíbrio.

A pesquisa elaborada nesse trabalho visa construir uma planta do tipo pêndulo invertido rotacional. Com o sistema construído será possível testar a eficácia do controlador, verificar as limitações físicas do hardware utilizado, validar a utilização de um modelo linearizado para controle do sistema não-linear, além de verificar o efeito da taxa de amostragem no sistema dinâmico.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo geral

Construir uma planta prática de um pêndulo invertido rotacional, também conhecido como pêndulo de Furuta, e projetar controladores utilizando a teoria de estabilidade de Lyapunov e desigualdades matriciais lineares para a estabilização na posição vertical para cima.

### 1.1.2 Objetivos específicos

1. Modelar e imprimir as partes físicas do sistema pêndulo invertido rotacional em *software* de modelagem e impressoras 3D;
2. Definir os sensores e atuadores necessários para construção da planta;
3. Unir as partes mecânicas à parte elétrica realizando a conexão dos componentes eletrônicos;
4. Programar o microcontrolador para envio e aquisição de sinais do sistema;
5. Pesquisar sobre o desenvolvimento de controladores a partir da teoria de estabilidade de Lyapunov;
6. Projetar um controlador utilizando desigualdades matriciais lineares;
7. Realizar simulação dos controladores projetados;
8. Implementar o algoritmo de controle do sistema em um microcontrolador;
9. Fazer a validação prática dos controladores;

10. Comparar o desempenho dos controladores projetados com diferentes taxas de amostragem.

## 1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado conforme os seguintes capítulos. O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico utilizado neste trabalho. No Capítulo 3 são expostos os materiais e métodos a serem empregados na construção do pêndulo invertido rotacional e projeto de controladores. O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos nas simulações e testes práticos. Por fim, o Capítulo 5 apresenta a conclusão do trabalho e possíveis trabalhos futuros.

## 2 Referencial Teórico

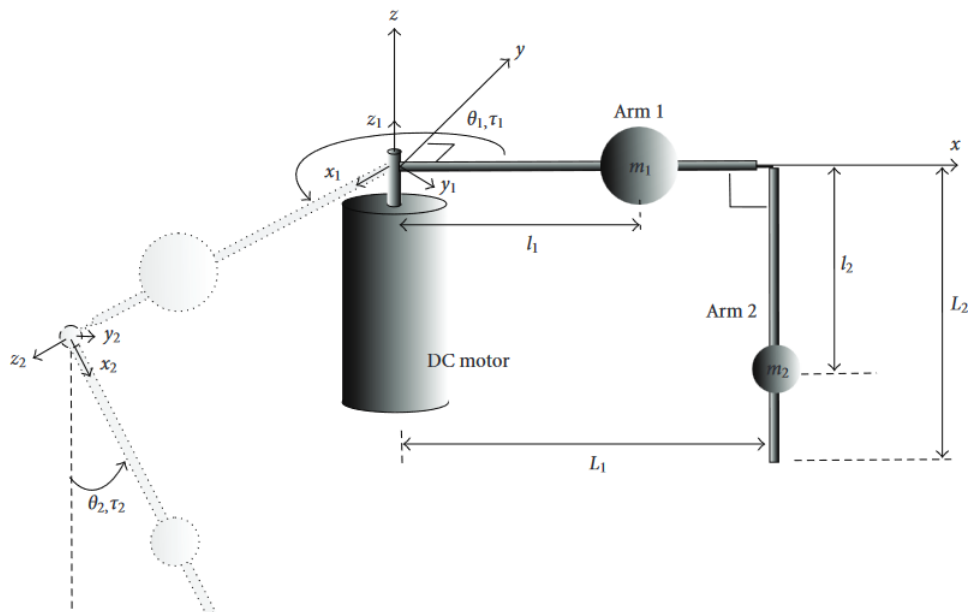
Neste capítulo serão abordados assuntos utilizados para o desenvolvimento do trabalho desde aspectos físicos e voltados a concepção do modelo até a síntese de controle. Primeiramente serão mostradas as equações que representam um pêndulo invertido rotacional e os conceitos mecânicos utilizados para se encontrá-las. Outro ponto a ser mostrado está relacionado ao projeto de controladores digitais. Então será mostrada a teoria de controle utilizada no projeto e como são implementados os controladores.

### 2.1 Pêndulo Invertido Rotacional

#### 2.1.1 Modelagem matemática

O sistema pêndulo invertido rotacional possui dinâmica extremamente não-linear devido a forma como foi projetado. Há apenas um atuador que exerce uma força de torque em um braço horizontal de modo que uma junção também transfere a força para um pêndulo que rotaciona livremente. Logo esse sistema pertence a classe de sistemas sub-atuados (HE; WANG; LIU, 2019), ou seja possui apenas um atuador mas dois graus de liberdade. A Figura 1 ilustra a estrutura de um pêndulo invertido rotacional.

Figura 1 – Esquema de um pêndulo invertido rotacional



Fonte: (CAZZOLATO; PRIME, 2011)

Em (FANTONI; LOZANO; SINHA, 2002) são feitos alguns apontamentos importantes sobre o estudo de sistemas sub-atuados, suas modelagens e desenvolvimento da lei de controle. O estudo sobre esses sistemas pode ser visto como uma extensão da pesquisa em sistemas não-holonômicos.

Sistemas não-holonômicos são caracterizados por terem dimensão finita e estabelecerem restrições sobre um ou mais estados do sistema. Essas limitações podem surgir de várias fontes, como a conservação do momento angular, restrições impostas pela incapacidade de movimento em determinadas direções, restrições incorporadas durante o design do sistema de controle, a ausência de atuadores em todas as direções do espaço de operação (MURRAY; LI; SASTRY, 2017). Enquanto os sistemas não-holonômicos tem restrições sobre suas velocidades e leva-se em consideração as equações cinemáticas. Os sistemas sub-atuados têm restrições quanto a aceleração e tanto a cinemática como a dinâmica são consideradas no projeto de um controlador.

A dinâmica do pêndulo envolve as relações entre as juntas do eixo do motor com o braço horizontal e da junta do braço com o pêndulo. Descrever uma equação que modele essa dinâmica não é uma tarefa fácil. Comumente é utilizada uma modelagem utilizando tensores de inércia com apenas um elemento não nulo enquanto os outros valores da diagonal são iguais a zero. Com isso é possível considerar apenas a inércia rotacional do pêndulo em relação ao eixo principal.

Um modelo dinâmico pode ser obtido a partir do esquema mecânico apresentado na Figura 1 (CAZZOLATO; PRIME, 2011). O motor aplica um torque no braço 1. A junção entre o braço 1 e braço 2 (pêndulo) possui livre rotação. Os dois braços possuem comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. Os braços também possuem massas  $m_1$  e  $m_2$  localizadas nas distâncias  $l_1$  e  $l_2$ , respectivamente, as quais são os comprimentos do ponto de rotação ao centro de massa de cada braço. Os braços possuem tensores de inércia  $\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$  em relação ao centro de massa. Cada junta na qual ocorre rotação possui coeficiente de amortecimento  $b_1$  e  $b_2$ .

Considerando os braços 1 e 2 como os eixos de coordenadas de um plano cartesiano, os tensores de inércia podem ser definidos como:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} J_{1xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{1yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{1zz} \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} J_{2xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{2yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{2zz} \end{bmatrix}.$$

A rotação angular do braço 1,  $\theta_1$ , é medida no plano horizontal plano horizontal, sendo positivo o sentido anti horário quando vista de cima. A rotação angular do braço 2,

$\theta_2$ , mede-se no plano vertical, sendo positivo o sentido anti horário visto de frente, quando o braço 2 está suspenso, ou seja, na posição de equilíbrio estável  $\theta_2 = 0$ . Assim como o torque exercido pelo motor no braço 1,  $\tau_1$ , é positivo no sentido anti horário quando visto de cima. O torque do distúrbio,  $\tau_2$ , também é positivo no sentido anti horário visto pela frente. A inércia do rotor do motor é desconsiderada assim como outros tipos de amortecimento que não sejam viscoso.

Com o sistema bem definido é possível utilizar a mecânica de Lagrange para se encontrar um modelo matemático que descreva sua dinâmica. A mecânica lagrangeana não tem necessidade de identificar as forças envolvidas e abre mão das Leis de Newton. Dessa forma é possível deduzir equações de movimento para sistemas mais complexos. Existem dois conceitos utilizados na mecânica lagrangiana para descrever a dinâmica de um sistema mecânico: as coordenadas generalizadas e as Equações de Lagrange. Coordenadas generalizadas é um conceito usado para definir a configuração de um sistema mecânico. Geralmente são utilizados 3 componentes para descrever a posição de uma partícula em um eixo cartesiano, entretanto esse número pode ser reduzido dependendo do grau de liberdade do mecanismo. As Equações de Lagrange caracterizam um sistema mecânico e dependem das coordenadas generalizadas  $q_i$ , de suas derivadas temporais  $\dot{q}_i$  e do tempo  $t$ . Essa função, conhecida como lagrangiana, simplifica a dinâmica de todo o sistema.

A análise física é feita primeiramente escolhendo um conjunto de coordenadas generalizadas e determinando as energias potencial,  $U$ , e cinética,  $T$ , do sistema. Assim a função lagrangiana define-se por:

$$\mathcal{L}_{(q_i, \dot{q}_i, t)} = T - U \quad (2.2)$$

Cazzolato e Prime (2011) utiliza a notação de tensores para realizar as formulações de Lagrange. Inicialmente é mostrado matrizes de rotação para da base para o braço 1,  $\mathbf{R}_1$  e do braço 1 para o braço 2,  $\mathbf{R}_2$ .

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_2 &= \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & \sin \theta_2 & 0 \\ -\sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \sin \theta_2 & -\cos \theta_2 \\ 0 & \cos \theta_2 & \sin \theta_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

As velocidades angular e linear do braço 1 são mostradas nas Equações 2.5 e 2.6. A base está em repouso, de modo que a junta entre a base e o braço 1 também está em

repouso, tornando assim a velocidade nula. A velocidade linear total em relação ao centro de massa do braço 1 é descrita pela [Equação 2.7](#).

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix}^\top. \quad (2.5)$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (2.6)$$

$$v_{1t} = v_1 + \omega_1 \times \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & \dot{\theta}_1 l_1 & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (2.7)$$

De modo semelhante pode-se encontrar as velocidades angular e linear total do braço 2. A velocidade angular do braço 2 é:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \mathbf{R}_2 \omega_1 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 & \sin(\theta_2) \dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}^\top. \end{aligned} \quad (2.8)$$

A velocidade da junta entre os dois braços é  $\omega_1 \times \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ . Assim as velocidades linear,  $v_2$ , e linear total do braço 2 em relação ao centro de massa,  $v_{2t}$ , são:

$$v_2 = \mathbf{R}_2 \left( \omega_1 \times \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \right) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} v_{2t} &= v_2 + \omega_2 \times \begin{bmatrix} l_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 L_1 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 L_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2 l_2 \\ -\dot{\theta}_1 l_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Então pode-se encontrar as energias potencial e cinética para cada um dos braços. As energias potencial,  $U_1$ , e cinética,  $T_1$ , do braço 1 são:

$$U_1 = 0, \quad (2.11)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \left( v_{1t}^\top m_1 v_{1t} + \omega_1^\top \mathbf{J}_1 \omega_1 \right) = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \left( m_1 l_1^2 + J_{1zz} \right). \quad (2.12)$$

As energias potencial,  $U_2$ , e cinética,  $T_2$ , do braço 2 são:

$$U_2 = gm_2 l_2 (1 - \cos(\theta_2)), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \left( v_{2t}^\top m_2 v_{2t} + \omega_2^\top \mathbf{J}_2 \omega_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \left( m_1 L_2^2 + \left( m_2 l_2^2 + J_{2yy} \right) \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{\theta}_2^2 \left( J_{2zz} + m_2 l_2^2 \right) + m_1 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Então as energias potenciais e cinéticas totais são:

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2, \\ T &= T_1 + T_2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

### 2.1.1.1 Equação de Euler-Lagrange

A lagrangiana é a diferença entre as energias cinética e potencial totais,  $L = T - U$ , como já foi mencionado anteriormente. Com isso pode-se obter a equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + b_i \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i. \quad (2.16)$$

em que  $q_i = [\theta_1 \ \theta_2]^\top$  são as coordenadas generalizadas,  $b_i = [b_1 \ b_2]^\top$  são os coeficientes de amortecimento viscoso e  $Q_i = [\tau_1 \ \tau_2]^\top$  são as forças generalizadas ou torque. Assim os termos da equação de Euler-Lagrange são dados como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \ddot{\theta}_1 \left( J_{1zz} + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2 \right. \\ &\quad \left. + (m_2 l_2^2 + J_{2yy}) \sin^2(\theta_2) + J_{2xx} \cos^2(\theta_2) \right) \\ &\quad + m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(2\theta_2) \left( m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx} \right), \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 \left( J_{2zz} + m_2 l_2^2 \right) \\ &\quad - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2), \\ -\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= 0, \\ -\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -\frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) \left( m_2 l_2^2 + J_{2yy} - J_{2xx} \right) \\ &\quad + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) + g m_2 l_2 \sin(\theta_2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Substituindo esses termos na equação de Euler-Lagrange podemos encontrar as equações diferenciais que descrevem o movimento do pêndulo. Algumas simplificações podem ser feitas levando em consideração alguns fatores estruturais como o comprimento dos braços os quais geralmente são longos e finos podendo-se desconsiderar o momento de inercia ao longo do eixo. Podem ser feitas aproximações dos momentos de inercia de modo que:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &\approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{J}_2 &\approx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

O momento de inercia total do braço 1 em relação ao eixo de rotação é  $\hat{J}_1 = J_1 + m_1 l_1^2$ . O momento de inercia total do braço 2 em relação ao ponto de rotação é  $\hat{J}_2 = J_2 + m_2 l_2^2$ . Então o momento de inercia total sobre o motor quando o pêndulo está no ponto de equilíbrio, ou seja, verticalmente para baixo, é  $\hat{J}_0 = J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2$ . Logo, ao substituir essas definições nos termos da equação de Euler-Lagrange obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \left( \begin{array}{l} \ddot{\theta}_1 (\hat{J}_0 + \hat{J}_2 \sin^2(\theta_2)) + \ddot{\theta}_2 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) \\ -m_2 L_1 l_2 \sin(\theta_2) \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) + b_1 \dot{\theta}_1 \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{l} \ddot{\theta}_1 m_2 L_1 l_2 \cos(\theta_2) + \ddot{\theta}_2 \hat{J}_2 - \frac{1}{2} \dot{\theta}_1^2 \hat{J}_2 \sin(2\theta_2) \\ + b_2 \dot{\theta}_2 + g m_2 l_2 \sin(\theta_2) \end{array} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

## 2.2 Sistemas Digitais

Sistemas digitais são dispositivos projetados para operar com informação lógica, ou seja, quantidades que podem ser representadas com valores discretos diferentes dos sistemas analógicos que podem trabalhar com quantidades físicas que variam em um faixa contínua de valores.

Grande parte das variáveis físicas são de origem analógica e frequentemente são supervisionadas, ajustadas e reguladas por sistemas, como exemplos dessas variáveis estão a temperatura, pressão, posição e velocidade. Embora estejamos habituados a expressar essas variáveis de maneira digital, na verdade estamos convertendo uma grandeza analógica em uma representação digital.

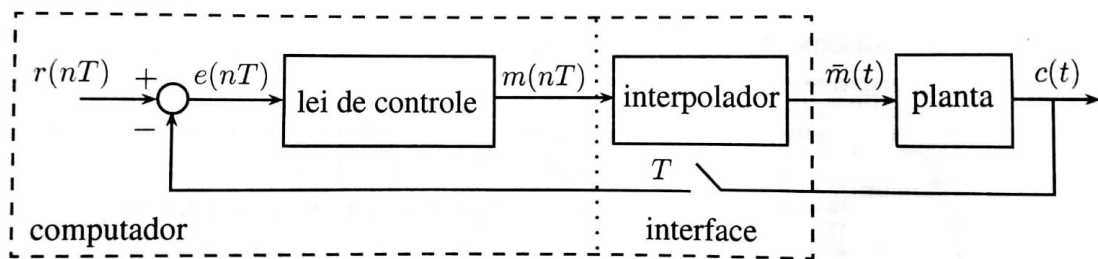
Ao se trabalhar com entradas e saídas analógicas é necessário lidar com conversão da variável física para um sinal elétrico, converter esse sinal elétrico ainda analógico em sinal digital, em seguida pode-se realizar o processamento da informações e, por fim, realizar o processo inverso de conversão para que as saídas do processamento sejam aplicados de forma analógica.

O controle digital ou discreto, uma vertente da teoria de controle, emprega computadores digitais como controladores de sistemas. Dependendo das necessidades, um sistema de controle digital pode ser utilizado em um microcontrolador, em um circuito integrado de aplicação específica, ou em um computador de mesa convencional. Uma ques-

tão crucial nesse tipo de sistema é que as variáveis medidas são amostradas, normalmente em intervalos de tempo fixo, chamado período de amostragem,  $T$ . Da mesma forma, o sinal de controle é gerado apenas nesses tempos de amostragem, que através de um interpolador, por exemplo o segurador de ordem zero (ZOH), é mantido fixo até o próximo instante de amostragem, isto torna o sinal em um sinal de tempo contínuo.

A [Figura 2](#) ilustra como ocorre esse processo, em que uma planta de tempo contínuo é controlada por um sistema de controle implementado em um computador.

Figura 2 – Diagrama de blocos de controle de sistema amostrado.



Fonte: ([AGUIRRE, 2023](#))

Sistemas discretos discretos podem ser utilizados como aproximações de plantas físicas de algum sistema contínuo. Para isso é encontrado um modelo contínuo que represente o sistema e sua dinâmica, em seguida faz-se o processo de discretização para que o modelo do sistema dinâmico possa ser aplicado a um sistema digital e então controlado. Existem diferentes métodos de discretização para se encontrar o modelo em tempo discreto.

Existem métodos de discretização usando aproximação numérica integral, o método de Euler ou o método de Tustin. Esses métodos devem ser utilizados quando uma função de transferência do controlador em tempo contínuo é discretizada para obter um algoritmo pronto para programação. Em tais casos, o sinal de entrada é um sinal em tempo discreto sem retenção. A discretização é baseada em alguns métodos numéricos para que o comportamento da função de transferência em tempo discreto seja semelhante ao da função de transferência em tempo contínuo. Porém, dependendo do método e do período de amostragem erros de discretização são gerados.

Para modelos em espaço de estados a base dos métodos é obter um modelo que, idealmente, se comporte de forma semelhante ao modelo de espaço de estados contínuo original, que aqui é assumido como linear.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{2.20}$$

em que  $u(t)$  é o sinal de controle e  $x(t)$  são as variáveis de estado.

Para um determinado tempo de amostragem  $T_s$ . O método de discretização de Euler (AGUIRRE, 2023) é dado por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= (I + AT_s)x(k) + BT_s u(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{2.21}$$

Como mencionado anteriormente, trabalhar com controladores em tempo discreto é necessário para implementação prática visto que o sistema de controle será implementado em um microcontrolador. Além disso, a escolha do tempo de amostragem também é um ponto a ser considerado. Algumas grandezas não podem ser medidas instantaneamente, logo precisam de tempo para alcançarem valores mais corretos, contudo o tempo de amostragem não pode ser longo demais de modo que o controle não seja capaz de atuar.

## 2.3 Estabilidade de Lyapunov através de LMIs

Garantir a estabilidade de um sistema dinâmico é o principal problema na teoria de controle. Diversos métodos tem sido desenvolvidos ao longo das décadas. Atualmente, uma das teorias mais empregadas para a determinação da estabilidade de um sistema é a Teoria de Estabilidade de Lyapunov, ela permite que o problema de estabilidade seja descrito em termos de desigualdades lineares matriciais, ou LMIs (*Linear Matrix Inequalities*). As LMIs são empregadas em diversos problemas práticos no campo da engenharia de controle, oferecendo como principal vantagem uma solução de forma convexa (BOYD, 1995).

A estabilidade de um sistema pode ser determinada pela sua energia total. Em outras palavras, se a energia do sistema diminui continuamente até alcançar zero conforme o tempo aumenta infinitamente, então o sistema é considerado assintoticamente estável. Os métodos de Lyapunov são capazes de avaliar a estabilidade utilizando uma função escalar que representa a energia do sistema. Se essa função, chamada função de Lyapunov, for positiva e decrescente, conclui-se que o sistema é assintoticamente estável.

O método direto de Lyapunov supõe-se verificar a estabilidade do sistema sem necessidade de solucionar as equações diferenciais que descrevem o sistema. Ele consiste em determinar uma função que caracterize a estabilidade. Contudo se a função não for encontrada, nada pode ser dito sobre a estabilidade.

Serão apresentadas algumas definições para se trabalhar com a estabilidade de Lyapunov. Dado o sistema não-linear de tempo contínuo:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0\tag{2.22}$$

Para o sistema (2.22),  $x_e$  é definido como um ponto de equilíbrio se  $f(x_e, t) \equiv 0$ ,  $\forall t \geq 0$ .

A estabilidade pode ser definida para o ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  se  $\forall t_0 \geq 0$  e  $\epsilon > 0$ , existir um  $\delta(t_0, \epsilon)$  tal que

$$\|x_0\| < \delta(t_0, \epsilon) \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.23)$$

Esta definição de estabilidade requer que as trajetórias iniciadas dentro da região de raio  $\delta$  não ultrapassem a região de raio  $\epsilon$ , centrada no ponto de equilíbrio  $x_e$ . A estabilidade assintótica para o ponto de equilíbrio  $x_e = 0$  ocorre se para todo  $t_0 \geq 0$  existe um  $\delta(t_0)$  tal que

$$\|x_0\| < \delta(t_0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (2.24)$$

Tais definições estão englobadas no Teorema a seguir.

**Theorem 1.** *Estabilidade de Lyapunov. Sendo  $V(x): \mathcal{D} \mapsto \mathfrak{R}_+$  uma função positiva definida ( $V(x) > 0$ ) no domínio  $\mathcal{D} \subset \mathfrak{R}^n$  contendo a origem e a derivada de  $V(x)$  em torno das trajetórias de (2.22) denotada por  $\dot{V}(x)$  e dada por*

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x) \end{aligned} \quad (2.25)$$

então, se  $\dot{V}(x)$  é semi-definida negativa ( $\dot{V}(x) \leq 0$ ), a trajetória de  $x(t)$  é estável, isto é,  $\|x(t)\| < \delta$ . Caso  $\dot{V}(x)$  seja definida negativa ( $\dot{V}(x) < 0$ ) o sistema é assintoticamente estável, isto é,  $\|x(t)\| \rightarrow 0$ , quando  $t \rightarrow \infty$ .

Conforme informado, o método de Lyapunov consiste na busca de uma função de Lyapunov definida positiva, cuja derivada seja definida negativa para todas as trajetórias do sistema. Considerando o sistema linear autônomo de tempo contínuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (2.26)$$

Uma função candidata de Lyapunov é a função quadrática definida da seguinte maneira

$$V(x) = x^\top P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j \quad (2.27)$$

em que  $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é uma matriz simétrica, logo  $P = P^\top$ , cujos elementos são  $p_{ij}$  e  $x_i, x_j$  são elementos do vetor de estados  $x$ .

Para que  $V(x)$  seja definida positiva é necessário que a matriz  $P$  seja definida positiva ( $P > 0$ ), ou seja, todos os autovalores de  $P$  sejam reais e maiores que zero.

O sistema terá sua estabilidade caracterizada dependendo se a derivada de  $V(x)$  for definida ou semi-definida negativa. A derivada de  $V(x)$  em torno das trajetórias do sistema é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^\top Px + x^\top P\dot{x} \\ &= x^\top A^\top Px + x^\top PAx. \\ &= x^\top (A^\top P + PA) x\end{aligned}\tag{2.28}$$

Então para que  $\dot{V}(x) < 0$  seja negativa,  $A^\top P + PA < 0$  deve ser definida negativa.

Lyapunov utilizou LMIs em seus trabalhos para solucionar problemas de estabilidade. Uma das vantagens das LMIs é que elas representam um método flexível para abordar questões dentro da engenharia de controle, pois é relativamente simples converter uma variedade de problemas de controle em problemas que podem ser resolvidos com LMIs. Em muitos cenários, o emprego de LMIs pode eliminar limitações presentes nos métodos tradicionais e, além disso, contribuir para a generalização de certos tipos de problemas.

Uma LMI é uma desigualdade da forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0\tag{2.29}$$

Nessa equação  $x \in R^n$  é variável vetorial, e as matrizes simétricas  $F_i = F_i^\top \in R^{m \times n}$ , são conhecidas. A LMI (2.29) é uma restrição convexa em  $x$ , ou seja, o conjunto  $\{x | F(x) > 0\}$  é convexo. A desigualdade pode representar uma ampla variedade de restrições convexas em  $x$ , como a desigualdade de Lyapunov .

Para se verificar se o sistema linear autônomo é assintoticamente estável, deve-se analisar se as LMIs a seguir são satisfeitas.

$$\begin{cases} P > 0, \\ A^\top P + PA < 0 \end{cases}\tag{2.30}$$

Analogamente, para um sistema linear autônomo de tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k),\tag{2.31}$$

a estabilidade assintótica é alcançada se as LMIs a seguir são satisfeitas.

$$\begin{cases} P > 0, \\ A^\top PA - P < 0 \end{cases}\tag{2.32}$$

## 2.4 Realimentação de Estados e o Problema de Regulação

Um sistema de controle em malha fechada eficiente possui desempenho satisfatório quando é estável e apresenta resposta adequada aos estímulos de entrada, minimizando os erros de estado estacionário e reduzindo o efeito de perturbações. Para atingir um desempenho aceitável com o controlador projetado normalmente são ajustados alguns parâmetros do sistema de modo a encontrar um meio termo entre as especificações desejadas.

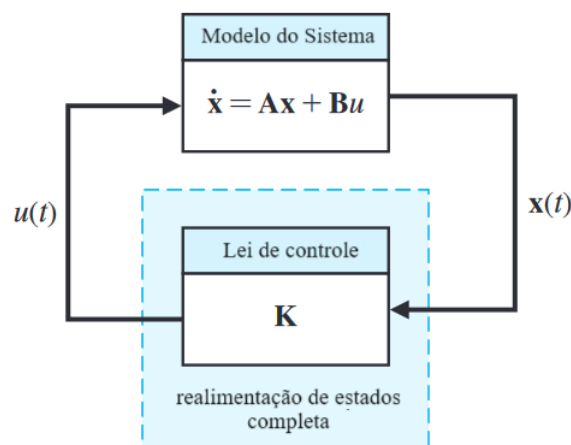
Planejar um controlador com variáveis de estado requer algumas etapas dependendo do sistema em que será aplicado. Idealmente um controlador pode ser projetado para um modelo mensurando todas as variáveis de estado, essa é chamada de lei de controle de realimentação de estado completo.

$$u(t) = Kx(t) \quad (2.33)$$

Um vez que a controlabilidade do sistema foi comprovada, o próximo passo será a criação da lei de controle assumindo que todos os estados podem ser medidos. É necessário encontrar uma matriz de ganhos  $K$  de modo que o sistema seja estabilizado com a entrada  $u(t)$  dada por:

A [Figura 3](#) ilustra um esquema simples para a realimentação de estados.

Figura 3 – Projeto de sistema com realimentação das variáveis de estado.



Fonte: (DORF; BISHOP, 2017)

Considerando o sistema linear

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.34)$$

Substituindo (2.33) na equação anterior, o sistema em malha fechada é

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t) = (A + BK)x(t) \quad (2.35)$$

O problema considerado é o problema de regulação de saída. Para um certo sistema de controle que está sujeito a perturbações externas, deseja-se projetar um controlador de realimentação dinâmico de modo que a saída do sistema em malha fechada convirja para zero à medida que o tempo tende ao infinito. O objetivo é compensar os efeitos das perturbações externas, a fim de manter no seu ponto de ajuste constate.

Mede-se o valor da saída usando equipamentos adequados. O valor da saída medido é comparado com o valor configurado, então o erro é calculado. O valor do erro é alimentado ao controlador que muda o valor da variável manipulada de forma que o erro seja reduzido. A variável manipulada geralmente é alterada por alguma ação final de controle. O controlador age em um elemento final de controle, normalmente um atuador, para realizar essa ação. O controle por realimentação de estados apresenta vantagens por requerer conhecimento da fonte ou natureza da perturbação, além disso só é necessário que a variável manipulada atue sobre a variável controlada.

## 3 Materiais e Métodos

Neste capítulo serão apresentados os materiais utilizados na construção da planta, pêndulo invertido rotacional, e as técnicas de controle empregadas no sistema a fim de manter sua estabilidade.

### 3.1 Projeto de Pêndulo Invertido Rotacional

É cada vez mais comum que dispositivos mecânicos contenham componentes eletrônicos e possuam algum tipo de monitoramento ou controle por computador. Por isso, o termo sistema mecatrônico pode se referir à vários dispositivos e sistemas. O uso de microcontroladores em dispositivos eletromecânicos tem se tornado cada vez mais frequente, permitindo maior flexibilidade e possibilidade de controle no desenvolvimento de sistemas.

Em um sistema mecatrônico comum, podemos identificar diferentes componentes que desempenham funções específicas. Os atuadores são responsáveis por gerar movimento ou realizar alguma ação. Os sensores, por sua vez, detectam o estado dos parâmetros do sistema, bem como as entradas e saídas. Já os dispositivos digitais têm como função controlar o sistema, enquanto os circuitos de condicionamento e interface estabelecem conexões entre os circuitos de controle e os dispositivos de entrada/saída. Por fim, os *displays* gráficos fornecem *feedback* visual para os usuários (ALCIATORE, 2012) .

Particularmente, um sistema de controle é composto por sensores e atuadores. Por meio dos sensores são medidos os valores das variáveis dinâmicas, como o ângulo do pêndulo. Tais informações são processadas em um microcontrolador que computa o sinal de controle a ser executado pelo atuador. Tais elementos serão apresentados nas próximas seções.

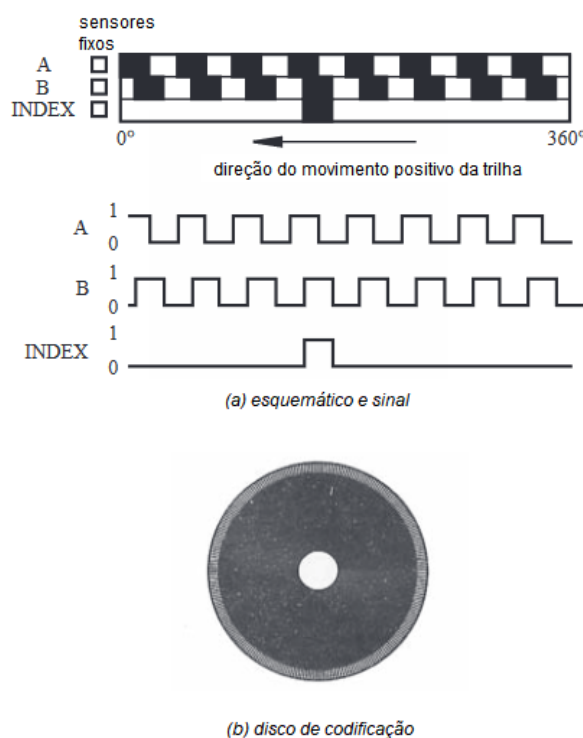
#### 3.1.1 Codificador óptico digital

Um codificador óptico digital é um dispositivo que transforma o movimento em uma sequência de pulsos digitais. Ao contar um único bit ou decodificar um conjunto de bits, os pulsos podem ser convertidos em medições de posição relativa ou absoluta. Os codificadores possuem configurações lineares e rotativas, mas o tipo mais comum é o rotativo. Os codificadores rotativos são fabricados em duas formas básicas: o codificador absoluto, onde uma palavra digital única corresponde a cada posição rotacional do eixo, e o codificador incremental, que produz pulsos digitais conforme o eixo gira, permitindo a medição do deslocamento relativo do eixo (ALCIATORE, 2012).

O disco óptico do codificador absoluto é projetado para produzir uma palavra digital que distingue  $N$  posições distintas do eixo. Por exemplo, se houver oito trilhas, o codificador é capaz de medir 256 ( $2^8$ ) posições distintas correspondentes a uma resolução angular, por exemplo de  $1,406^\circ$  ( $360^\circ/256$ ). Os tipos mais comuns de codificação numérica usados no codificador absoluto são os códigos *gray* e binários natural. O código *gray* foi desenvolvido de forma que apenas um bit mude de estado por transição de contagem, diferentemente do código binário, no qual vários bits podem mudar durante as transições de contagem.

O codificador incremental, também chamado de codificador relativo, é mais simples do que o codificador absoluto. Ele contém duas trilhas e dois sensores que emitem sinais A e B, que indicam a direção de rotação do eixo. Esses sinais são defasados em  $1/4$  de ciclo e são chamados de sinais de quadratura. Conforme o eixo gira, trens de pulsos ocorrem em A e B em uma frequência proporcional à velocidade do eixo. O disco codificador e os sinais de saída A e B são mostrados na [Figura 4](#). Frequentemente, uma terceira saída, chamada ÍNDICE, fornece um pulso por revolução, o que é útil na contagem de rotações completas ou para definição de uma posição de referência ou zero.

Figura 4 – Padrões de sinais da trilha do disco codificador incremental.



Fonte: (JANG; SUN, 1996, p. 26)

Decodificar as transições de A e B usando circuitos lógicos sequenciais pode forne-

cer três resoluções diferentes: 1X, 2X e 4X. A resolução 4X fornece um pulso de saída em cada borda positiva e negativa do sinal A ou B, resultando em quatro vezes mais pulsos de saída. A direção da rotação é determinada pelo nível de um sinal de quadratura durante uma transição de borda do segundo sinal de quadratura.

Figura 5 – Codificador incremental industrial.



Fonte: Encoder rotativo<sup>1</sup>.

### 3.1.2 Codificador magnético

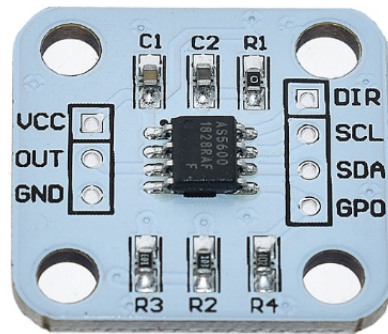
Os sensores de efeito Hall são transdutores que apresentam alteração na tensão de saída quando estão sob efeito de campo magnético. O AS5600, [Figura 6](#) é um sensor magnético de posição baseado no efeito Hall que converte um campo magnético perpendicular a superfície do chip em tensão de saída. Os sinais são primeiramente amplificados e filtrados antes de serem convertidos pelo conversor analógico-digital. A saída do ADC é processada por uma computador digital interno que verifica a rotação do campo magnético para calcular o ângulo. A intensidade do campo magnético é utilizada pelo controlador automático de ganho (AGC) para ajustar o nível de amplificação para compensar as variações de temperatura e do campo magnético.

O AS5600 é programado pelo padrão I2C de comunicação serial. Por meio das leituras vindas da serial pode ser configurado o ângulo inicial e final da rotação mapeando a resolução total dos 360 graus de rotação.

<sup>1</sup> Disponível em: <https://www.policomcomponentes.com.br/produtos/encoder-rotativo/encoder-rotativo-incremental-hnc-5-24vdc-5000-ppr-canal-a-bz.html>. Acesso em: 20 de fev. 2024.

<sup>2</sup> Disponível em: <https://github.com/MarlinFirmware/Marlin/issues/21138>. Acesso em: 20 de fev. 2024.

Figura 6 – Codificador magnético AS5600.



Fonte: Encoder rotativo magnético<sup>2</sup>.

### 3.1.3 Motor de passo

De acordo com [Alciatore \(2012\)](#), motores elétricos são de longe os atuadores mais presentes, ocorrendo em praticamente todos os sistemas eletromecânicos. Os motores de corrente contínua (DC) são usados em uma grande quantidade de projetos mecatrônicos devido às características torque-velocidade alcançáveis com diferentes configurações elétricas. As velocidades dos motores DC podem ser controladas suavemente e, na maioria dos casos, são reversíveis. Como os motores DC têm uma alta relação de torque para inércia do rotor, eles podem responder rapidamente.

Para um determinado torque fornecido pelo motor, a curva corrente-torque pode ser usada para determinar a quantidade de corrente necessária quando a tensão nominal é aplicada. Como regra geral, os motores fornecem grandes torques em baixas velocidades, e grandes torques implicam grandes correntes do motor. O torque de partida ou torque de parada é o torque máximo que o motor pode produzir, em velocidade zero, associado à partida ou sobrecarga do motor.

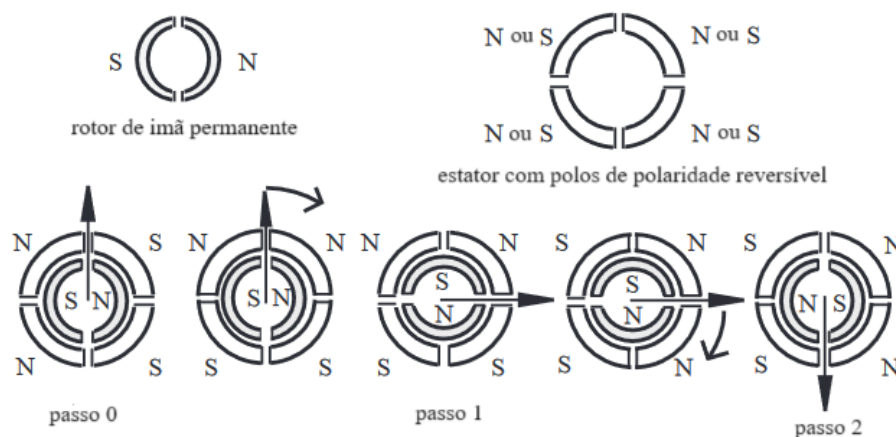
Um tipo particular de motor de corrente contínua, denominado motor de passo, pode ser de ímã permanente ou de relutância variável. Esse motor possui certas características de desempenho, incluindo a capacidade de girar em ambas as direções, movimentar-se em incrementos angulares precisos, manter um torque de retenção mesmo quando está parado e ser controlado por meio de circuitos digitais. Ele se move em incrementos precisos de angulação, chamados passos, em resposta a pulsos digitais. O número e a taxa de pulsos controlam a posição e velocidade do motor. Esses motores podem ser fabricados com diferentes quantidade de passos por rotação com valor máximo de 200 passos. Para aumentar a quantidade de passos por rotação é necessário circuitos especiais. Alguns circuitos podem aumentar a quantidade de passos para mais de dez mil.

Motores de passo podem ser classificados como bipolares, os quais demandam duas

fontes de energia ou uma fonte de energia com polaridade alternável, ou unipolares, que necessitam apenas de uma fonte de energia. Esses motores são alimentados por fontes de corrente contínua e precisam de circuitos digitais para gerar sequências de energia nas bobinas, possibilitando o movimento do motor.

Motores de passo de ímã permanente possuem a vantagem de um pequeno torque residual de retenção, conhecido como torque de detenção, mesmo quando o estator não está energizado. A [Figura 7](#) ilustra a movimentação de um motor de passo. No passo 0, o rotor está em equilíbrio devido à atração entre os polos opostos no estator e no rotor. A menos que haja uma mudança nas polaridades dos ímãs nos polos do estator, o rotor permanece nessa posição e pode resistir a um torque contrário até atingir um valor conhecido como torque de retenção. Quando as polaridades do estator são alteradas conforme mostrado (do passo 0 para o passo 1), um torque é aplicado ao rotor, fazendo com que ele se mova 90 graus no sentido horário para uma nova posição de equilíbrio mostrada como passo 1.

Figura 7 – Sequência de passos.

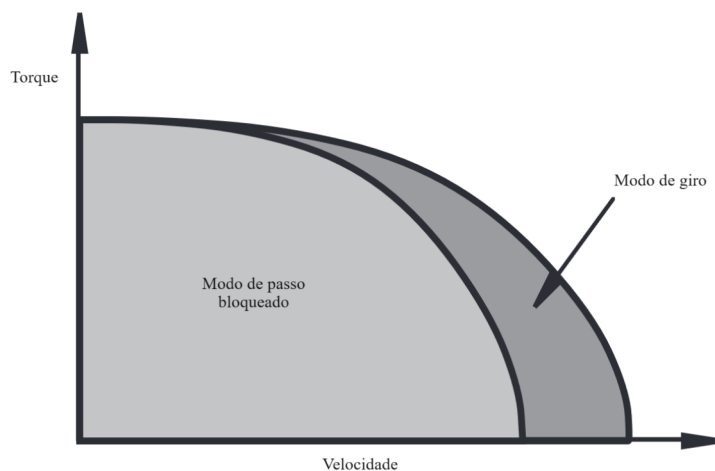


Fonte: ([ALCIATORE, 2012](#), p. 454).

As características de torque e velocidade de um motor de passo são comumente separadas em duas zonas distintas, conforme demonstrado na [Figura 8](#). No modo bloqueado, o rotor diminui sua velocidade e pode eventualmente parar entre cada passo. Dentro dessa zona, é possível iniciar, parar ou inverter o motor instantaneamente, sem comprometer a precisão dos passos. No modo de giro, a velocidade é tão elevada que não permite iniciar, parar ou inverter instantaneamente. Para entrar nesse modo, o rotor deve ser acelerado gradualmente e, para sair dele, deve ser desacelerado gradualmente.

Os motores de passo, como já foi mencionado, possuem grande precisão em seu movimento. Podem se mover a uma taxa de passos por revolução acima de 200 utilizando

Figura 8 – Curva torque-velocidade do motor de passo.



Fonte: (ALCIATORE, 2012, p. 455).

um circuito externo específico. Essa técnica é conhecida como micro passos em que a fase da corrente é controlada em frações ao invés de binário. São usadas ondas senoidais discretizadas ao invés de ondas quadradas.

A tensão de entrada para operação o motor de passo a ele conectado pode chegar a 35V. O chip A4988, mostrado na Figura 9, possui duas pontes H com transistores FET DMOS para fazer o controle de motores de passo bipolares. Esse chip não pode controlar motores de passo unipolares. O chip permite cinco modos de controle de passo sendo: passo completo, meio passo, um quarto de passo, um oitavo de passo e um dezesseis-avos de passo. No último modo podemos aumentar a quantidade de passos por revolução à 3200 passos. O módulo *driver* do A4988 possui pinos como STEP (passo) utilizado para fazer o avanço de passo, DIR para indicar o sentido de rotação, ENABLE que ativa os *drivers* do motor com sinal baixo e as entradas que selecionam o modo de micro passo. A biblioteca AccelStepper do Arduino pode ser usada para controlar motores de passo. Por meio dessa biblioteca podem ser configuradas a velocidade de rotação, a velocidade máxima que pode ser atingida entre outras características.

### 3.1.4 Estrutura mecânica

De acordo com Abreu et al. (2014) o acesso a uma impressora 3D não só reduz o tempo de se obter um protótipo funcional, mas também possibilita a construção de peças com complexidade geométrica maior. Essas peças poderiam ser difíceis, ou até impossíveis, de serem produzidas por processos convencionais, logo a impressão de modelos 3D

<sup>3</sup> Disponível em: <https://www.multcomercial.com.br/driver-de-motor-de-passo-a4988-gc-49.html>. Acesso em: 20 de fev. 2024.

Figura 9 – Driver A4988.



Fonte: Driver de motor de passo a4988<sup>3</sup>.

possibilitam a prova de conceitos e validação experimental. Além disso, o custo de produção também é reduzido. Do ponto de vista do ensino e aprendizado, uma impressora 3D permite que estudantes participem no ciclo completo de desenvolvimento de um produto, do projeto à produção.

A impressão 3D tem sido aplicada em inúmeros campos, desde indústrias tão diversas como automotiva, defesa, aeroespacial, eletrônica, até a saúde, o ensino e o mercado de *hobbies* (faça você mesmo - do inglês DIY). Uma simples máquina de impressão 3D que pode produzir uma variedade de produtos diferentes usando materiais diversos, juntamente à possibilidade de produzi-lo mais próximo do ponto de uso, pode ter um grande impacto na forma de implementar novos modelos de negócios e na economia da fabricação. As impressoras 3D são atualmente usadas principalmente para produzir uma única parte (lote de um), criada sob demanda, que pode ser considerada um protótipo. Essas impressoras 3D implementam a tecnologia de modelagem por deposição fundida (FDM) e usam materiais termoplásticos, como polilactato (PLA) e acrilonitrila butadieno estireno (ABS).

Este trabalho tem como objetivo a implementação prática de um sistema pêndulo invertido rotacional. Para atingir esse objetivo serão realizados alguns passos que abrangem desde a construção física de um protótipo funcional até os testes de validação do controlador.

Serão feitos inicialmente os modelos mecânicos das peças necessárias para construção, além de materiais como rolamentos e eixos. O desenho dos modelos 3D serão feitos no software *SolidWorks* e posteriormente foram impressos.

Algumas impressões 3D foram feitas como a base para encaixe do motor de passo e o desenho do encaixe do codificador incremental, as Figuras 10 e 11 mostram os modelos desenhados.

A montagem seguirá configurações de sistemas pêndulo invertido rotacional nor-

malmente encontrados em textos da literatura. A princípio os componentes eletrônicos utilizados estarão embutidos em módulos e apenas serão conectados ao microprocessador. Serão considerados fatores como o torque do motor, comprimento e massa do pêndulo e a massa do codificador o qual irá aferir o ângulo do pêndulo.

Figura 10 – Desenho da estrutura do pêndulo invertido.

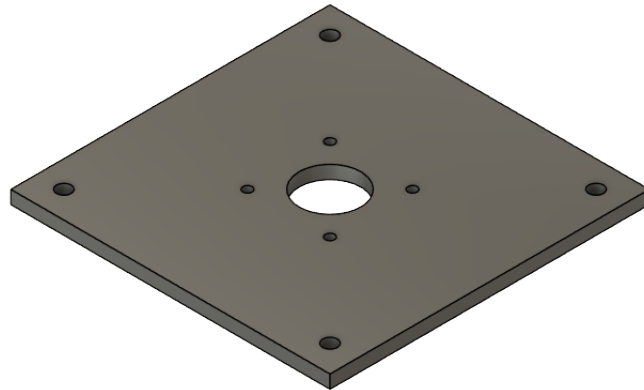
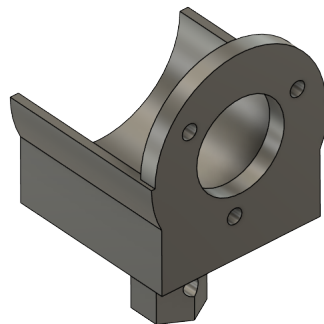


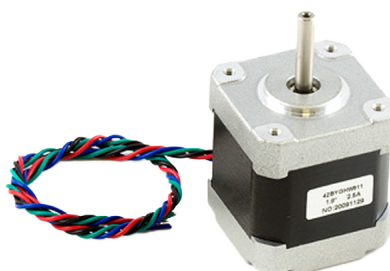
Figura 11 – Desenho encaixe para o codificador incremental.



Um passo importante no desenvolvimento de um sistema eficiente é a aquisição de dados. Um codificador incremental de 360 pulsos será utilizado para leitura do ângulo do pêndulo, a resolução do codificador é de até 1440 contagens utilizando os sinais de quadratura. Resoluções maiores de contagem geram maior velocidade na resposta do controlador em relação a pequenas variações. Foi utilizado um motor de passo NEMA 17 com 200 passos, [Figura 12](#). O motor será controlado por um driver A4988 com a utilização

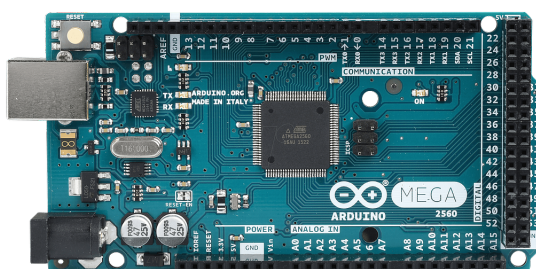
de micro passos. Além disso será utilizado um *encoder* de efeito Hall, com máximo de 4096 contagens, na base do motor com um ímã diametralmente magnetizado acoplado ao seu eixo.

Figura 12 – Motor de passo NEMA 17.



Fonte: motor de passo<sup>4</sup>.

Figura 13 – Arduino Mega 2560.



Fonte: Arduino mega<sup>5</sup>.

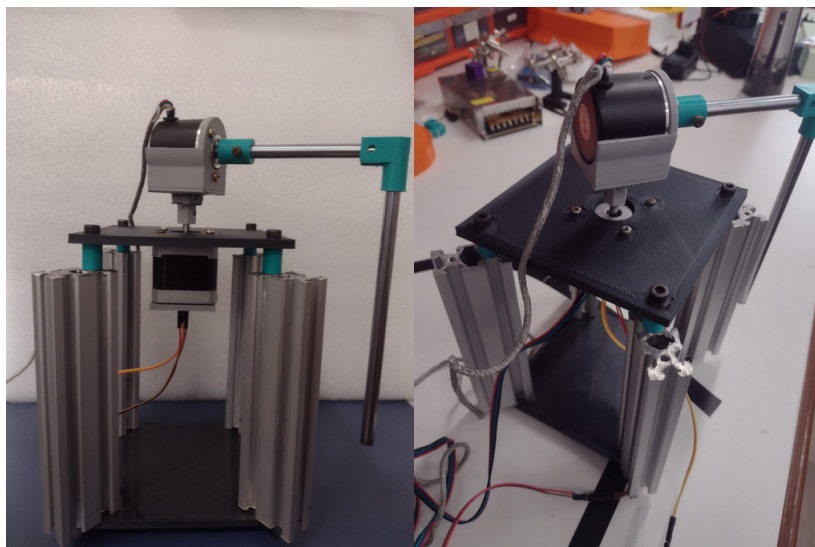
A figuração final da estrutura montada pode ser vista na Figura 14.

O algoritmo de controle e aquisição de sinais foram feito em C++, embarcados em uma placa de desenvolvimento Arduino Mega, Figura 13. O microprocessador presente

<sup>4</sup> Disponível em: <https://www.pngwing.com/en/search?q=nema+17>. Acesso em: 20 de fev. 2024.

<sup>5</sup> Disponível em: <https://www.electronicshub.org/wp-content/uploads/2021/01/Arduino-Mega-Pinout.jpg>. Acesso em: 20 de fev. 2024.

Figura 14 – Estrutura mecânica final.



na placa é o Atmega 2560 que possui alta performance e arquitetura de 8 bits. Essa plataforma possui entradas e saídas digitais para leitura dos sensores. Além dos pinos para leitura digital, também utilizadas interrupções nos pinos de comunicação 19 e 18, e o protocolo I2C de comunicação, nos pinos 20 e 21.

## 3.2 Síntese do Sistema de Controle

Conforme apresentado no [Capítulo 2](#), o modelo dinâmico do pêndulo invertido rotacional é um modelo não-linear. No entanto, neste trabalho serão utilizadas técnicas de controle linear, sendo necessário obter um modelo dinâmico linear. Além disso, o sistema de controle do pêndulo invertido rotacional será implementado em um microcontrolador, sendo necessário ainda converter o modelo dinâmico para o tempo discreto. As seções a seguir abordam essas questões.

### 3.2.1 Linearização

Grande parte das teorias de projeto de sistemas de controle foram desenvolvidas para sistemas lineares porém praticamente todos os sistemas reais são não-lineares. Para contornar esse problema pode-se fazer uma linearização em torno do ponto de operação. No caso do sistema de interesse, a estabilização ocorre em torno da posição vertical para cima e conforme mencionado anteriormente, apenas pequenos desvios no ângulo são tolerados pelo sistema.

Um método comum de linearização é a linearização jacobiana. De acordo com [Boyce e DiPrima \(2004\)](#), a linearização Jacobiana utiliza a expansão em Séries de Taylor

a fim de encontrar um sistema linear que aproxime do sistema não-linear em torno um ponto de equilíbrio, de forma que seja possível analisar as características desse ponto, como a estabilidade.

O sistema linearizado pode ser descrito pela seguinte equação em espaços de estados:

$$\begin{aligned}\delta\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \mathbf{B}\delta u \\ \delta y &= \mathbf{C}\delta\mathbf{x} + \mathbf{D}\delta u\end{aligned}\quad (3.1)$$

em que  $\delta x = x - x_0$ ,  $\delta u = u - u_0$ ,  $x$  representa os estados definidos para o sistema,  $x_0$  representa os valores dos estados no ponto de equilíbrio e  $u_0$  a ação de controle no ponto de equilíbrio. A matriz  $A$  é definida como

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix}\quad (3.2)$$

Escolhendo-se então o ponto de equilíbrio como

$$\begin{aligned}\theta_{1e} &= 0, \\ \theta_{2e} &= 0, \\ \dot{\theta}_{1e} &= 0, \\ \dot{\theta}_{2e} &= 0,\end{aligned}\quad (3.3)$$

e realizando a linearização jacobiana na [Equação 2.19](#) o seguinte sistema linearizado é encontrado

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_{31} & B_{32} \\ B_{41} & B_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix},\quad (3.4)$$

em que

$$\begin{aligned}
A_{31} &= 0, \\
A_{32} &= \frac{gm_2^2 l_2^2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, \\
A_{33} &= \frac{-b_1 \hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, \\
A_{34} &= \frac{b_2 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, \\
A_{41} &= 0, \\
A_{42} &= \frac{gm_2 l_2 \hat{J}_0}{(m_2^2 L_1^2 l_2^2 - \hat{J}_0 \hat{J}_2)}, \\
A_{43} &= \frac{b_1 m_2 l_2 L_1}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, \\
A_{44} &= \frac{-b_2 \hat{J}_0}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, \\
B_{31} &= \frac{\hat{J}_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, \\
B_{41} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(\hat{J}_0 \hat{J}_2 - m_2^2 L_1^2 l_2^2)}, \\
B_{32} &= \frac{m_2 L_1 l_2}{(m_2^2 L_1^2 l_2^2 - \hat{J}_0 \hat{f}_2)}, \\
B_{41} &= \frac{\hat{J}_0}{(m_2^2 L_1^2 l_2^2 - \hat{J}_0 \hat{J}_2)}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

### 3.2.2 Controle por Realimentação de Estados baseado em LMIs

O controle por realimentação de estados foi realizado utilizando-se do critério de Lyapunov por meio de LMIs para o sistema discreto.

Seja o sistema de tempo discreto

$$\begin{cases} x^+ = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{3.6}$$

sendo  $x^+ = x[k + 1]$ .

O controle por realimentação de estados tradicional

$$u = Kx. \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6), o sistema em malha fechada é dado por

$$\begin{cases} x^+ = A_f x, \\ y = C_f x, \end{cases} \quad (3.8)$$

em que  $A_f = (A + BK)$ .

Considerando-se uma função de Lyapunov quadrática

$$V(x) = x^T P x; \quad \text{com } P = P^T > 0 \quad (3.9)$$

Então para que o sistema em malha fechada seja estável  $\Delta V < 0$ . Sendo assim

$$V(x^+) - V(x) < 0. \quad (3.10)$$

Substituindo (3.8) em (3.10)

$$x^T (A_f^T P A_f - P) x < 0 \quad (3.11)$$

Então

$$A_f^T P A_f - P < 0 \quad (3.12)$$

Podemos reorganizar a desigualdade para

$$-P + (A_f^T P) P^{-1} (P A_f) < 0. \quad (3.13)$$

Aplicando-se o complemento de Schur (BOYD, 1995) na equação 3.13, então encontra-se a matriz

$$\begin{bmatrix} -P & A_f^T P \\ P A_f & -P \end{bmatrix} < 0. \quad (3.14)$$

Multiplicando a esquerda por  $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1})$  para aplicar a congruência (BOYD, 1995), obtém a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & P^{-1} A_f^T \\ A_f P^{-1} & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.15)$$

Pode-se então substituir as não-linearidade por variáveis linearizantes  $P^{-1} = Q$ ,  $Z = K P^{-1}$  e  $A_f$  para se obter a matriz:

$$\begin{bmatrix} -Q & Q A^T + Z^T B^T \\ A Q + B Z & -Q \end{bmatrix} < 0. \quad (3.16)$$

Os ganhos do controlador são encontrados ao resolver as LMIs, encontrando valores para  $Q$  e  $Z$ , chega-se ao valor de  $K$ , definido por

$$K = Z Q^{-1}. \quad (3.17)$$

### 3.2.3 Questões sobre o Sinal de Controle

A partir do modelo apresentado pela [Equação 2.19](#), o sinal de controle encontrado pela lei por realimentação de estados é o torque. No entanto, o motor de passo que atua sobre o sistema é controlado por velocidade angular. Assim, precisamos fazer modificações no sinal de modo a transformar o sinal do torque em velocidade.

O torque gerado pelo motor e transferido ao pêndulo é dado por:

$$\tau(t) = I\alpha(t), \quad (3.18)$$

em que  $I$  é o momento de inércia, que pode ser encontrado pelo modelo, e  $\alpha(t)$  é a aceleração angular.

Note que a expressão está no domínio do tempo contínuo e precisamos implementar em um sistema digital. Assim, a aceleração angular pode ser discretizada também pelo método de Euler ([AGUIRRE, 2023](#)), tal que:

$$\alpha(k) = \frac{\omega(k) - \omega(k-1)}{T_s}. \quad (3.19)$$

$$\omega(k) = T_s\alpha(k) + \omega(k-1). \quad (3.20)$$

Assim, substituindo (3.18) em (3.20), encontra-se a velocidade angular que deve ser enviada como sinal de controle para o motor de passo.

$$\omega(k) = \frac{T_s\tau}{I} + \omega(k-1) = \frac{T_sKx}{I} + \omega(k-1). \quad (3.21)$$

## 4 Resultados

Nesta sessão serão apresentados os resultados encontrados utilizando o método de controle descrito no [Capítulo 3](#). As *LMI*s para se achar a função de Lyapunov foram implementadas no software MATLAB, utilizando o parser *Yalmip* (LÖFBERG, 2004) e solver *Mosek*. Foi criada uma função na qual é implementado o algoritmo para se encontrar os ganhos do controlador.

Foram encontrados valores de ganhos para duas diferentes taxas de amostragem  $T_s$  com intuito de avaliar o comportamento do sistema, são elas: 0,02 s e 0,04 s. Além disso também foi avaliada a resposta do sistema para valores diferentes de micro passos.

O modelo contínuo linearizado do sistema é obtido pela [Equação 3.4](#) e considerando apenas a força que age sobre o braço 1,  $\tau_2 = 0$ . Os parâmetros do sistema são:

- $m_1 = 0,033$  Kg - massa do braço 1;
- $L_1 = 0,084$  m - comprimento do braço 1;
- $l_1 = \frac{1}{2}L_1$  m - distância até o centro de massa do braço 1;
- $m_2 = 0,065$  Kg - massa do braço 2;
- $L_2 = 0,166$  m - comprimento do braço 2;
- $l_2 = \frac{1}{2}L_2$  m - distância até o centro de massa do braço 2.

Os amortecimentos do pêndulo e do braço podem ser considerados suficientemente pequenos tal que

- $b_1 = 0$  Nm/(rad/s) - o amortecimento viscoso do braço 1
- $b_2 = 0$  Nm/(rad/s) - o amortecimento viscoso do braço 2

Com os valores dos parâmetros bem definidos, encontra-se o modelo contínuo linear dado por:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 57,6902 & 0 & 0 \\ 0 & 75,6763 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2513 \\ 1090 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

## 4.1 Análise de Estabilidade para $T_s = 0,02$ s

A seguir são mostrados os resultados da estabilização do pêndulo invertido rotacional considerando a taxa de amostragem igual 20 milissegundos. Um intervalo de 8 segundos (de 16 s a 24 s do teste) do teste prático é apresentado nas figuras a seguir. Em que uma perturbação no ângulo do pêndulo é causada em torno dos 18,5 s.

As matrizes discretas foram obtidas utilizando a discretização de Euler com taxa de amostragem  $T_s = 0,02$  s. Apresentadas abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,02 \\ 0 & 1,1538 & 1 & 0 \\ 0 & 1,5135 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50,2629 \\ 21,8008 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0. \quad (4.3)$$

Os ganhos do controlador por realimentação de estados obtido utilizando as Equações 3.16 e 3.17 é dado por:

$$K_{20} = \begin{bmatrix} 0,0043 & -0,4753 & 0,0065 & -0,0663 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Figura 15 – Resposta do ângulo do pêndulo a distúrbio.  $T_s = 0,02$  s e motor atuando com 4 micro passos.

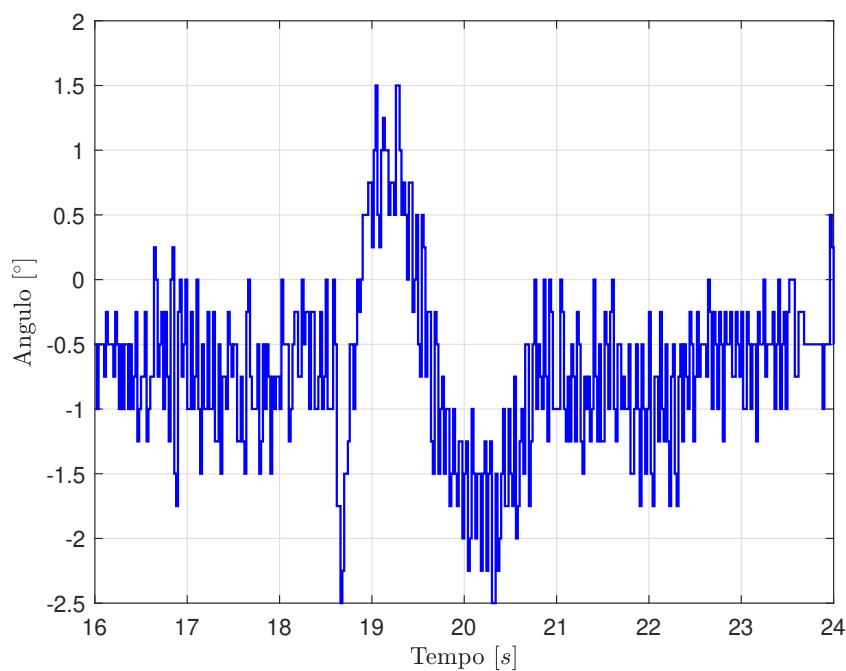


Figura 16 – Sinal de controle em torque no distúrbio.  $T_s = 0,02$  s e motor atuando com 4 micro passos.

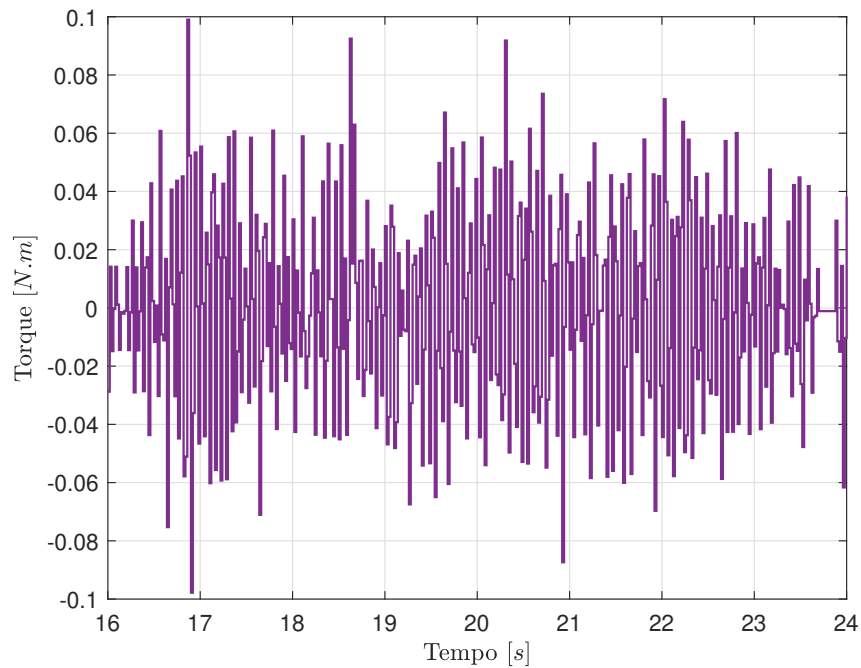
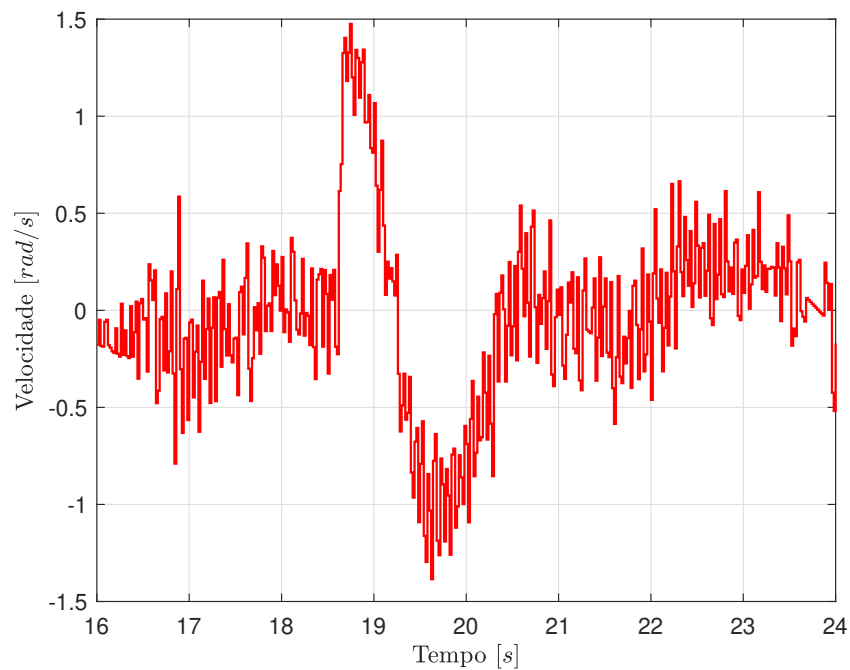


Figura 17 – Sinal de controle em velocidade no distúrbio.  $T_s = 0,02$  s e motor atuando com 4 micro passos.



O controlador obteve bons resultados na estabilização do pêndulo na posição de equilíbrio vertical e consegue responder de forma rápida a distúrbios quando é utilizada a taxa de amostragem  $T_s = 0,02$  s. As Figuras 15 e 18 mostram a variação do ângulo do

Figura 18 – Resposta do ângulo do pêndulo a distúrbio.  $T_s = 0,02$  s e motor atuando com 16 micro passos.

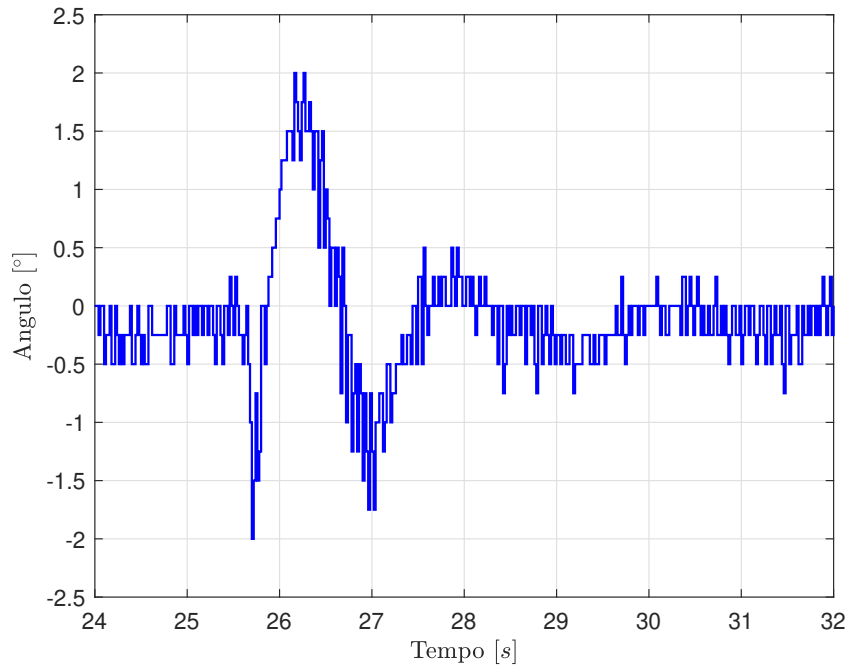
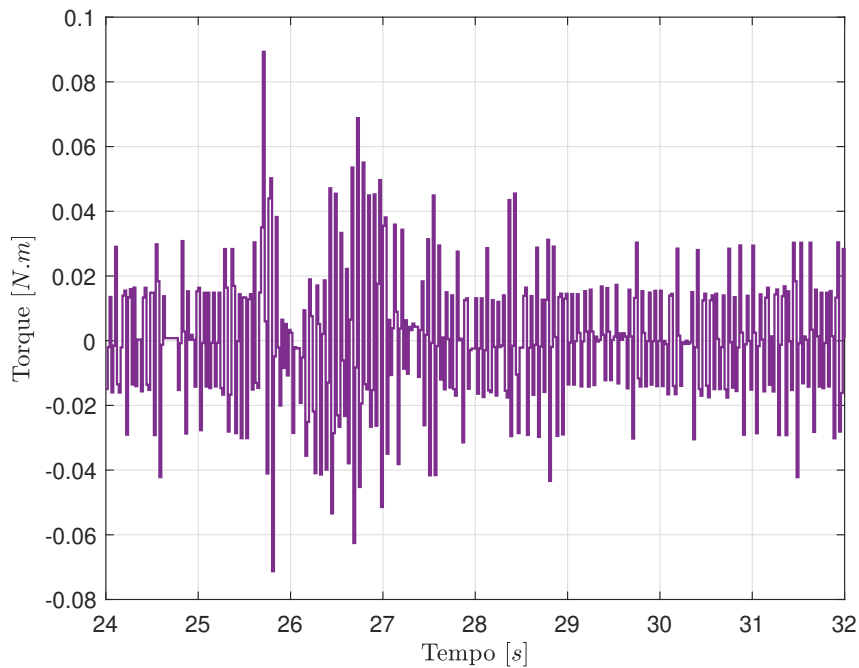


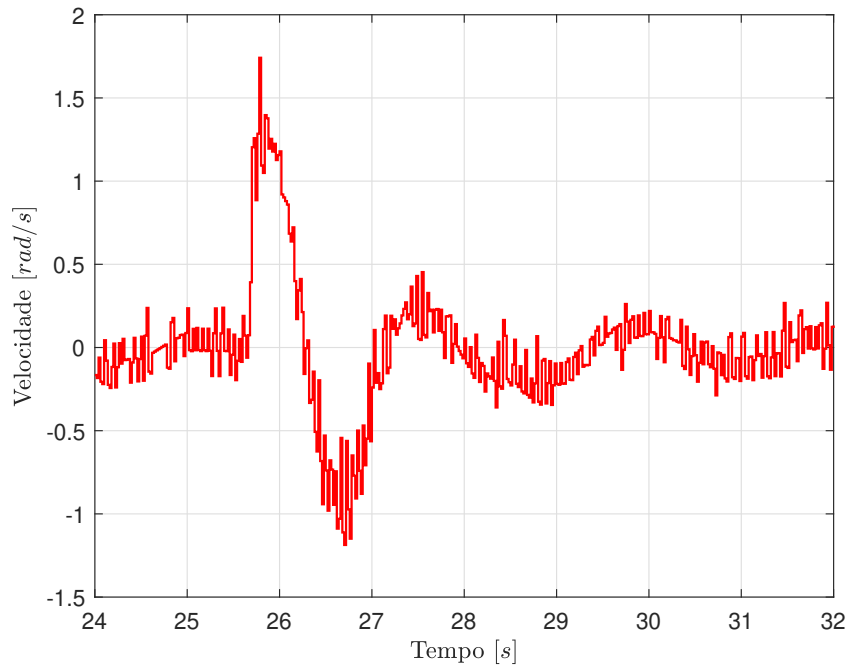
Figura 19 – Sinal de controle em torque.  $T_s = 0,02$  s e motor atuando com 16 micro passos.



pêndulo. Note que quando está estado estacionário, a variação fica em torno de  $\pm 0,5^\circ$ .

O testes realizados com o motor configurado para 16 micro passos obtiveram desempenho menos oscilatória em torno do ponto de operação, em relação aos testes realizados

Figura 20 – Sinal de controle em velocidade.  $T_s = 0,02$  s e motor atuando com 16 micro passos.



com o motor configurado para 4 micro passos, esse efeito pode ser visto nas Figuras 15 e 18. Essa redução também pode ser vista entre os sinais de controle em termos da velocidade nas Figuras 17 e 20. Da mesma, o sinal de controle em termos do torque tem amplitudes reduzidas na Figura 19 em relação a Figura 16.

## 4.2 Análise de Estabilidade para $T_s = 0,04$ s

Nesta sessão serão evidenciados os resultados para a taxa de amostragem de 40 milissegundos. O intervalo das amostras é de 16 segundos, correspondendo de 52 a 68 segundos do teste prático.

Novamente, as matrizes do sistema discreto foram obtidas utilizando a discretização de Euler com taxa de amostragem  $T_s = 0,04$  s. Utilizando os mesmo parâmetros do sistema, como na seção anterior. Assim, temos que:

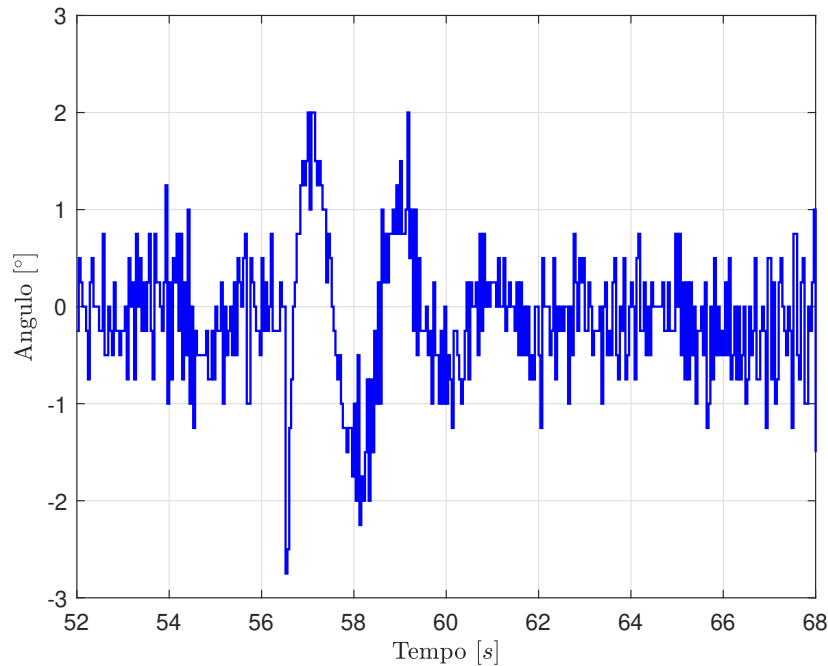
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0,04 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0,04 \\ 0 & 2,3076 & 1 & 0 \\ 0 & 3,0271 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100,5257 \\ 43,6015 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0. \quad (4.6)$$

Os ganhos do controlador por realimentação de estados obtido utilizando as Equações 3.16 e 3.17 é dado por:

$$K_{40} = \begin{bmatrix} 0,0021 & -0,2799 & 0,0033 & -0,0370 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Figura 21 – Resposta do ângulo do pêndulo a distúrbio.  $T_s = 0,04$  s e motor atuando com 4 micro passos.



O controlador para  $T_s = 0,04$  s também foi capaz de estabilizar o pêndulo no equilíbrio vertical superior e responder de forma rápida a distúrbios. As Figuras 21 e 24 mostram esse comportamento pelo ângulo do pêndulo.

O testes realizados com o motor configurado para 16 micro passos obtiveram performance menos oscilatória em torno do ponto de operação, assim como na sessão anterior, em relação aos testes realizados com o motor configurado para 4 micro ao se comparar as Figuras 21 e 24 comportamento apresentado também pelo gráfico do sinal de controle como velocidade.

O sinal de controle é suavizado na Figura 19 em relação a Figura 16. A amplitude do sinal varia  $\pm 0,025$  com 4 micro passos mesmo com o sistema bem próximo da região de equilíbrio, enquanto que usando 16 micro passos esse intervalo é em torno de  $\pm 0,01$ .

Figura 22 – Sinal de controle em torque no distúrbio.  $T_s = 0,04$  s e motor atuando com 4 micro passos.

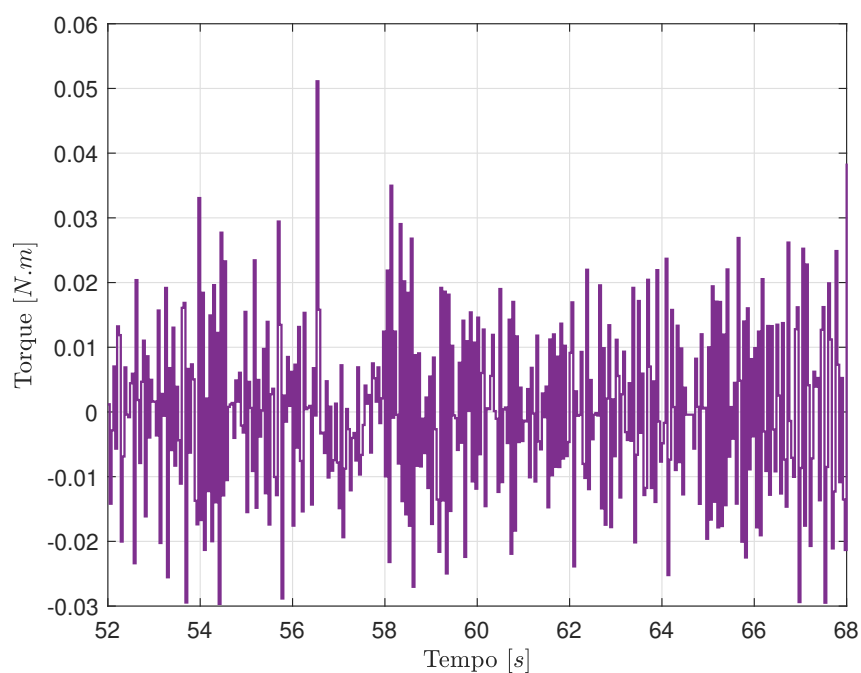


Figura 23 – Sinal de controle em velocidade no distúrbio.  $T_s = 0,04$  s e motor atuando com 4 micro passos.

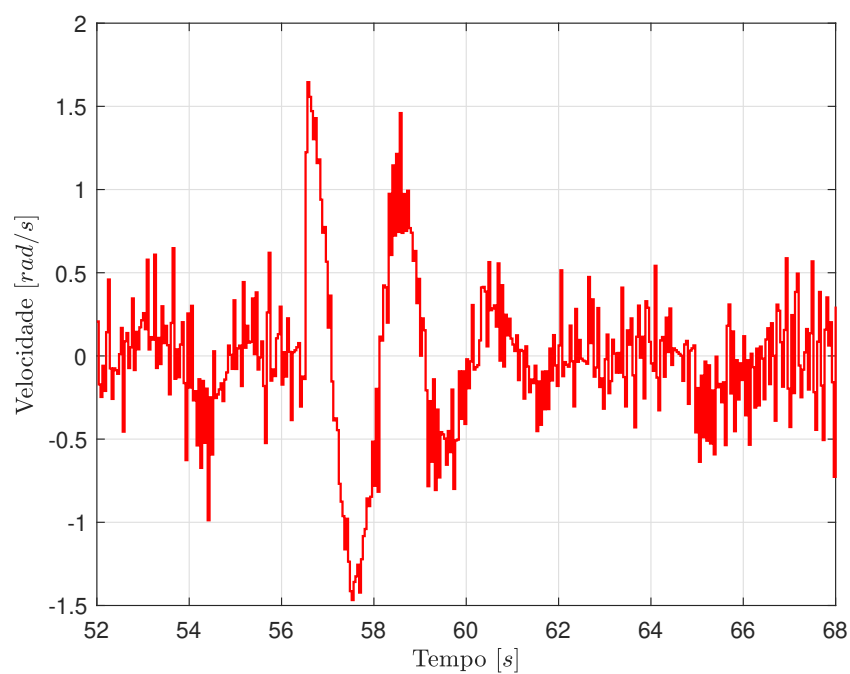


Figura 24 – Resposta do ângulo do pêndulo a distúrbio.  $T_s = 0,04$  s e motor atuando com 16 micro passos.

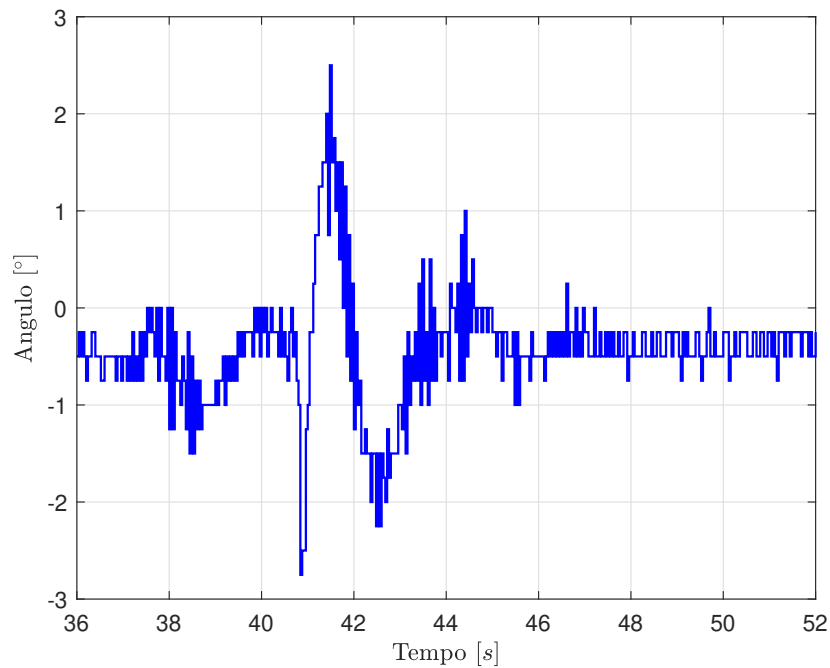
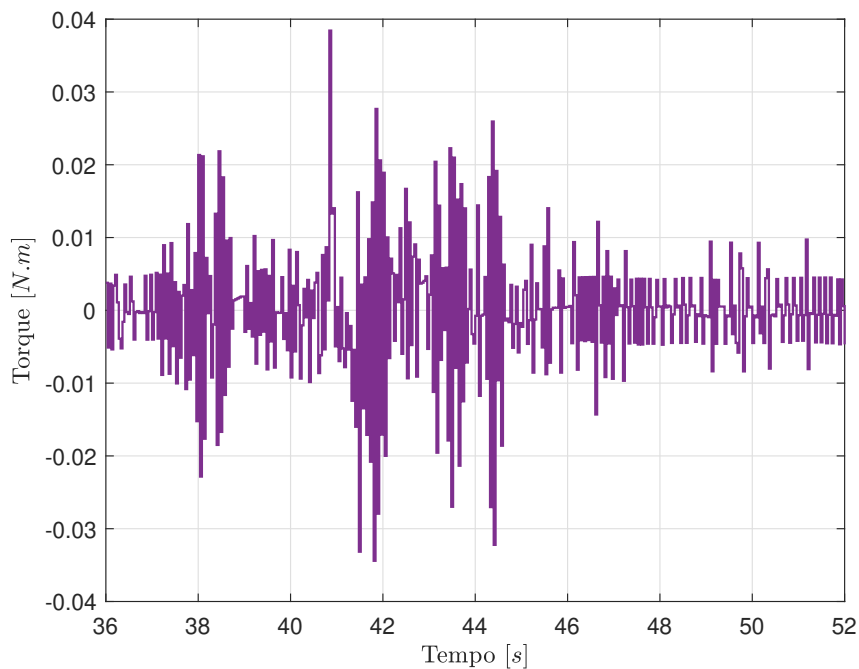


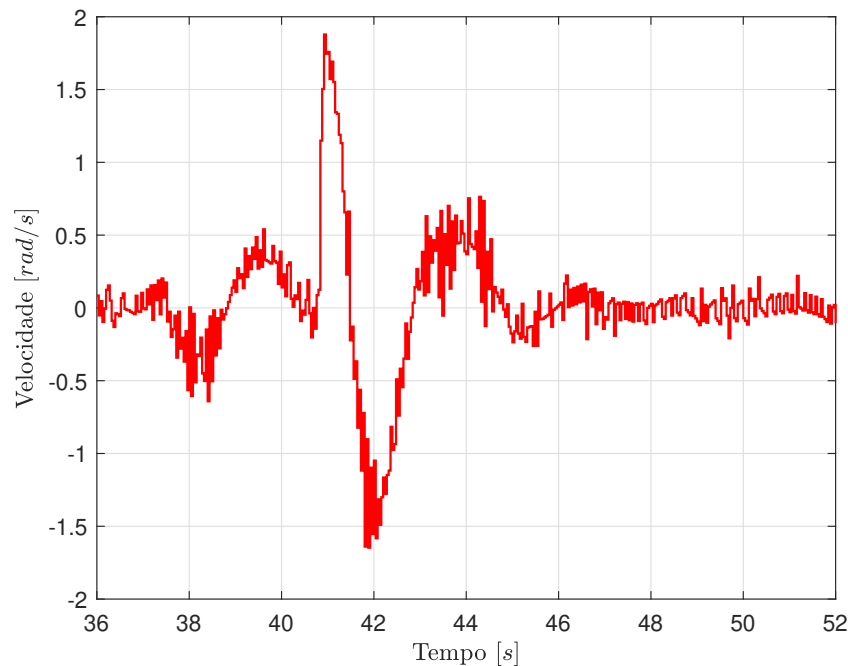
Figura 25 – Sinal de controle em torque no distúrbio.  $T_s = 0,04$  s e motor atuando com 16 micro passos.



### 4.3 Análise Comparativa

Como foi mencionado no [Capítulo 3](#) os motores de passo normalmente chegam a um valor máximo de 200 passos por revolução sem uso de *driver*. A quantidade de passos

Figura 26 – Sinal de controle em velocidade no distúrbio.  $T_s = 0,04$  s e motor atuando com 16 micro passos.



que o motor também influencia a resposta do sistema. Ao controlar a velocidade do motor de passo, a biblioteca utilizada calcula o intervalo necessário para realizar o próximo passo. A cada passo dado o motor irá se deslocar com um valor de angulação correspondente como  $1,8^\circ$  para 200 passos por revolução. Realizar um movimento com angulação tão grande gera uma resposta muito brusca no pêndulo o que influencia a estabilidade do mesmo. O movimento do motor de passo pode ser mais suave dependendo do número de micro passos escolhidos. Devido a esses fatores foram realizados testes variando o número de micro passos do motor de passo.

As Figuras 18 e 24 mostram a resposta do ângulo do pendulo quando se aumenta a quantidade de passos para 3200 passos por revolução, utilizando a estratégia de micro passos, anteriormente estava em 800 passos por revolução. Pode-se perceber que a oscilação em torno do ponto de operação foi reduzida tanto para  $T_s = 0,02$  s quanto para  $T_s = 0,04$  s.

A partir dos resultados apresentados pode-se também observar que a alteração na taxa de amostragem da discretização gera mudança significativa na resposta do sistema. Comparando o gráfico da Figura 15 com o gráfico da Figura 21, ambos mostrando a posição do pêndulo em a resposta a um distúrbio, pode-se perceber que o sistema tornou-se mais oscilatório com a discretização feita pela taxa de amostragem de 40 milissegundos. O tempo para estabilizar o distúrbio no com  $T_s = 0,04$  s é maior que o tempo de estabilização com  $T_s = 0,02$  s. Aumentar a taxa de amostragem do sistema pode torna-lo

mais ou menos oscilatório dependendo de como ocorre a discretização e da variação do erro. O sistema em questão tem dinâmica muito rápida para que o motor possa atuar em respostas a variações mínimas dos estados, dessa forma permitindo que o pêndulo permaneça equilibrado. Aumentar a taxa de amostragem aumenta o intervalo entre os cálculos de controle, tornando o controlador mais lento e, conseqüentemente, deixa a resposta do atuador mais oscilatória. Isso não significa que reduzir a taxa de amostragem a valores extremamente baixos sempre irá melhorar a performance do controlador. Diminuir a taxa de amostragem torna o sistema mais suscetível a ruídos da medição.

Existem grandezas que, dependendo de como estão sendo mensuradas, não têm seus valores calculados instantaneamente como a velocidade angular. É preciso que haja um intervalo entre o cálculo da velocidade para que seu valor esteja próximo do real. A velocidade angular calculada depende da quantidade de amostras do ângulo recebidas pelo *encoder* rotativo. Diminuir a taxa de amostragem acarreta em erros maiores da medição da velocidade. Considerando os fatores apresentados, é preciso encontrar um valor intermediário em que o controlador seja rápido o suficiente para que a resposta não fique extremamente oscilatória e, por outro lado, não ocasione erros muito grandes na medição.

Os dois casos mostrados, com  $T_s = 0,02$  s e  $T_s = 0,04$  s, obtiveram resultados positivos e conseguiram manter a estabilidade do pêndulo mesmo quando um distúrbio é aplicado. Foram realizados testes em com  $T_s = 0,06$  s, contudo a resposta do sistema tornou-se extremamente oscilatório e não conseguia manter a estabilidade. Reduzir a taxa de amostragem a baixo de 20 milissegundos tornou o sinal de velocidade angular do pêndulo mais ruidoso. Vale ressaltar que a quantidade de amostras recebidas pelo *encoder* incremental varia dependendo da resolução do mesmo. O *encoder* utilizado para medição do ângulo do pêndulo possui resolução máxima de 1440 contagens utilizando a quadratura, então um *encoder* com resolução maior garante mais amostras do ângulo.

A diferença de comportamento pode ser vista nos gráfico dos sinais de controle em velocidade e em torque quando sujeitos ao distúrbios. Utilizando a taxa de amostragem e 40 milissegundos a oscilação nos sinais de controle também fica maior.

## 5 Conclusões

Por meio deste trabalho foi possível realizar o controle por realimentação de estados de um sistema pêndulo invertido rotacional, também conhecido como pêndulo de Furuta. Esse sistema pertence a classe de sistemas sub-atuados e possui dois graus de liberdade além de dinâmica não-linear. A teoria de estabilidade de Lyapunov em conjunto com restrições em termos de desigualdades matriciais lineares foi utilizada e sua eficácia comprovada quanto a capacidade de estabilização do sistema. A abordagem também mostrou-se eficiente para síntese de controladores de tempo discreto para diferentes taxas de amostragem.

Ao decorrer do desenvolvimento do trabalho os objetivos citados sessão 1.1 puderam ser alcançados. A construção do projeto de um pêndulo de Furuta foi realizada utilizando peças desenhadas em *software* de impressão 3D e posteriormente impressas. Foram definidos os sensores e atuadores para a planta de controle com o objetivo de mensurar os estados necessários. O algoritmo de controle também foi programado no microcontrolador escolhido para o processamento de dados. As LMIs necessárias para o projeto de controle foram implementadas no *software* MATLAB onde também foram implementados os processos de linearização e discretização. A partir do projeto do controle, desenvolvimento do algoritmo de aquisição de dados e cálculo do controle no microcontrolador e envio do sinal de controle pós tratamento de dados, puderam ser testados diferentes ganhos obtidos para taxas de amostragens diferentes e validação dos controladores.

Com os resultados obtidos verificou-se alguns problemas práticos de implementação de um controlador digital. A taxa de amostragem é crucial para o funcionamento adequado de um controlador de modo a garantir que o sistema permaneça em equilíbrio. A taxa amostragem influencia no desempenho do controlador podendo tornar a resposta do sistema mais oscilatória dependendo também da dinâmica do sistema.

### 5.1 Trabalhos Futuros

O controle realizado nesse trabalho compreende o equilíbrio em torno do ponto de operação vertical para cima em que o ângulo do pêndulo é considerado igual a 0, conhecido como problema de regulação. Um dos problemas a ser resolvido em trabalhos posteriores é o movimento de subida do pêndulo que se resume em sair da posição de equilíbrio estável, posição vertical para baixo, e entrar na zona de operação do equilíbrio instável sendo então conduzido a partir daí ao problema de regulação abordado neste trabalho.

Além disso, pode ser feito também o rastreamento da referência para a posição

angular do braço 1. Dessa forma o pêndulo poderá ser regulado no ponto de equilíbrio instável mas utilizando um ângulo de referência para o braço.

Os problemas de subida do pêndulo e rastreamento da referência para o ângulo do braço 1 podem ser resolvidos utilizando estratégias de controle não-linear como, por exemplo, controlador *Fuzzy* Takagi-Sugeno e controle por modo deslizante. Essas estratégias incluem a dinâmica não-linear do sistema que é perdida no processo de linearização em torno de um ponto de equilíbrio. Além das técnicas de controle também será estudado a necessidade de alteração dos componentes escolhidos para a construção da planta.

# Referências

- ABREU, P. et al. On the use of a 3d printer in mechatronics projects. In: . [S.l.: s.n.], 2014. Citado na página 30.
- AGUIRRE, L. *Controle de Sistemas Amostrados, Segunda Edição*. [S.l.: s.n.], 2023. ISBN 978-65-8706-565-6. Citado 4 vezes nas páginas 10, 19, 20 e 38.
- ALCIATORE, D. G. H. M. B. *Introduction to Mechatronics and Measurement Systems*. [S.l.: s.n.], 2012. Citado 4 vezes nas páginas 25, 28, 29 e 30.
- BOYCE, W.; DIPRIMA, R. *Elementary differential equations and boundary value problems*. 8th. ed. [S.l.]: Wiley New York, 2004. Citado na página 34.
- BOYD, S. Linear matrix inequalities in system and control theory (s. boyd, l. e. ghaoui, e. feron, and v. balakrishnan). *SIAM Review*, v. 37, 1995. ISSN 0036-1445. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 37.
- CAZZOLATO, B. S.; PRIME, Z. On the dynamics of the furuta pendulum. *Journal of Control Science and Engineering*, v. 2011, 2011. ISSN 16875249. Citado 4 vezes nas páginas 10, 13, 14 e 15.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Modern Control Systems (13th Edition)*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 23.
- FANTONI, I.; LOZANO, R.; SINHA, S. Non-linear control for underactuated mechanical systems. *Applied Mechanics Reviews*, v. 55, 2002. ISSN 0003-6900. Citado na página 14.
- HE, B.; WANG, S.; LIU, Y. Underactuated robotics: A review. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, v. 16, 2019. ISSN 17298814. Citado na página 13.
- JANG, J.-S. R.; SUN, C.-T. *Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1996. ISBN 0132610663. Citado na página 26.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *In Proceedings of the CACSD Conference*. Taipei, Taiwan: [s.n.], 2004. Citado na página 39.
- MURRAY, R. M.; LI, Z.; SASTRY, S. S. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. [S.l.: s.n.], 2017. Citado na página 14.
- PRADO, A.; HERRERA, M.; MENÉNDEZ, O. Intelligent swing-up and robust stabilization via tube-based nonlinear model predictive control for a rotational inverted-pendulum system. *Revista Politecnica*, v. 45, 2020. ISSN 24778990. Citado na página 10.