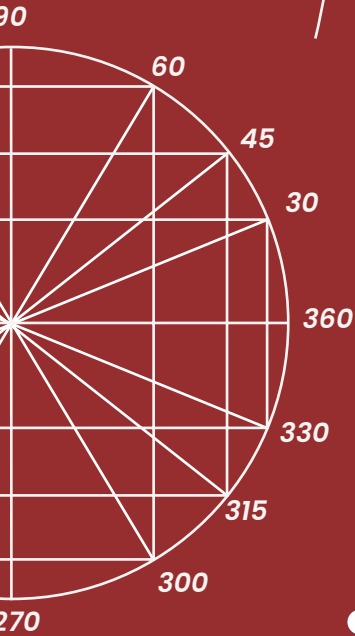


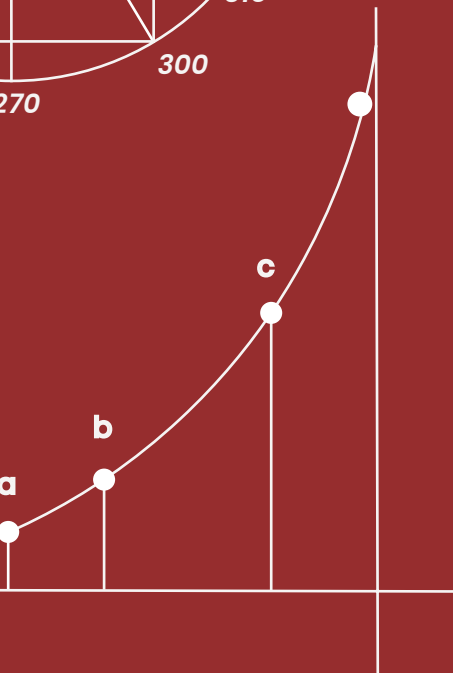
$$g(x) = \frac{\cos^{-1}}{x}$$



# Cálculo

Trabalhando com curvas e superfícies  
com o uso de software educacional

Elainne Ladislau Ferreira Pereira



editora  
UEA

# Cálculo

Trabalhando com curvas e superfícies com o uso de  
software educacional

---

Governo do Estado do Amazonas

Wilson Miranda Lima  
**Governador**

Universidade do Estado do Amazonas

André Luiz Nunes Zogahib  
**Reitor**

Kátia do Nascimento Couceiro  
**Vice-reitora**

*editora***UEA**

Isolda Prado de Negreiros Nogueira Horstmann  
**Diretora**

Maria do Perpetuo Socorro Monteiro de Freitas  
**Gerente**

Wesley Sá  
**Editor Executivo**

Raquel Maciel  
**Produtora Editorial**

Isolda Prado de Negreiros Nogueira Horstmann (Presidente)

Adriana Távora de Albuquerque Taveira

Carlos Mauricio Seródio Figueiredo

Gislaine Regina Pozzetti

Josefina Diosdada Barrera Khalil

Katell Uguen

Orlem Pinheiro de Lima

Silvia Regina Sampaio Freitas

Vanúbia Araújo Laulate Moncayo

**Conselho Editorial**

# Cálculo

Trabalhando com curvas e superfícies com o uso de  
software educacional

---

Elainne Ladislau Ferreira Pereira

Wesley Sá  
Raquel Maciel  
**Coordenação Editorial**

Raquel Maciel  
**Assistência Editorial**

Ciara Curintima  
Rebekah Pereira  
**Projeto Gráfico**

André Teixeira  
Hillary Vieira  
Sindell Amazonas  
**Revisão**

Nicole Rocha  
**Diagramação**

Iasmim Rodrigues  
Nicole Rocha  
Rebekah Pereira  
**Finalização**

Todos os direitos reservados © Universidade do Estado do Amazonas  
Permitida a reprodução parcial desde que citada a fonte

Esta edição foi revisada conforme as regras do Novo Acordo Ortográfico  
da Língua Portuguesa

P436c  
2025

Pereira, Elaine Ladislau Ferreira.  
Cálculo: Trabalhando com curvas e superfícies com o uso de  
software educacional v.2: 1. ed. — Manaus (AM): Editora UEA, 2025.  
97 p.:il color [Ebook]  
Formato PDF

ISBN 978-85-7883-759-4

Inclui referências bibliográficas

1. Cálculo. 2. Softwares Educacionais. 3. Curvas. I. Título

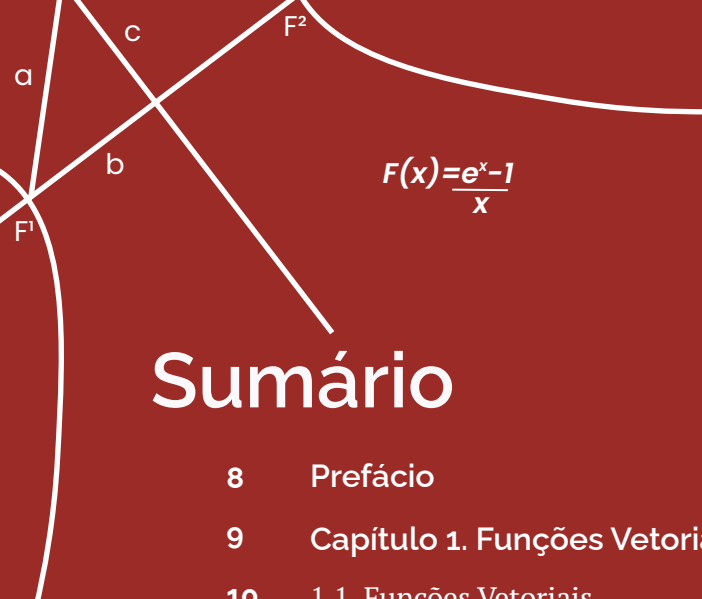
CDU 1997 – 517.97

*Elaborada pela bibliotecária Sheyla Lobo Mota-11/CRB-484*



*editora*UEA

Av. Djalma Batista, 3578 – Flores | Manaus – AM – Brasil  
CEP 69050-010 | +55 92 992058858  
editora.uea.edu.br | editora@uea.edu.br


$$F(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

# Sumário

<b>8</b>	<b>Prefácio</b>
<b>9</b>	<b>Capítulo 1. Funções Vetoriais</b>
<b>10</b>	1.1. Funções Vetoriais
<b>10</b>	1.2. Domínios, Imagens e Traços de uma Função Vetorial
<b>13</b>	1.3. Principais parametrizações de Curvas
<b>16</b>	1.4. Cálculo de Limites, Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais
<b>19</b>	1.5. Algumas Operações Vetoriais entre Funções Vetoriais
<b>20</b>	1.6. Cálculo de Áreas usando Funções Vetoriais
<b>22</b>	1.7. Comprimento de uma Curva
<b>24</b>	1.8. Curvatura de uma Curva
<b>27</b>	1.9. Uso do software GeoGebra para plotagem de Curvas Planares e Espaciais
<b>28</b>	1.10. Uso do software GeoGebra para cálculo de Áreas
<b>29</b>	1.11. Cálculo do comprimento de uma curva no GeoGebra
<b>30</b>	1.12. Cálculo da Curvatura de uma curva no GeoGebra
<b>31</b>	<b>Capítulo 2. Funções com duas variáveis</b>
<b>32</b>	2.1. Funções com duas variáveis
<b>33</b>	2.2. Domínio (Região Admissível), Imagem e Gráfico de funções com duas variáveis
<b>35</b>	2.3. Curvas de Níveis
<b>38</b>	2.4. Principais Superfícies
<b>39</b>	2.5. Uso do GeoGebra para plotagem de Superfícies
<b>40</b>	2.6. Visualização das Curvas de Níveis no GeoGebra

<b>41</b>	<b>Capítulo 3. Cálculo diferencial de Funções com duas variáveis</b>
<b>43</b>	3.1. Limite de funções com duas variáveis
<b>52</b>	3.2. Derivadas Parciais & Derivadas Direcionais
<b>57</b>	3.3. Plano Tangente a uma Superfície
<b>59</b>	3.4. Regra da Cadeia
<b>62</b>	3.5. Derivação Implícita
<b>65</b>	3.6. Taxa de Variação
<b>67</b>	3.7. Visualização das Derivadas Parciais no GeoGebra
<b>68</b>	<b>Capítulo 4. Estudo Diferencial</b>
<b>70</b>	4.1. Pontos Críticos
<b>71</b>	4.2. Classificação dos Pontos Críticos via Hessiano da função
<b>76</b>	4.3. Problemas de Otimização
<b>78</b>	4.4. Simulação de Problemas no GeoGebra
<b>80</b>	<b>Capítulo 5. Integrais Duplas</b>
<b>81</b>	5.1. Integrais Duplas
<b>83</b>	5.2. Integrais Iteradas - Coordenadas Retangulares
<b>85</b>	5.3. Mudança de Regiões Admissíveis, Alternância do elemento de área
<b>87</b>	5.4. Integrais em Domínios Circulares - Coordenadas Polares
<b>92</b>	5.5. Cálculo de Áreas via Integrais Duplas
<b>93</b>	5.6. Cálculo de Volumes com o uso do GeoGebra
<b>96</b>	<b>Sobre a autora</b>

# Prefácio

O cálculo diferencial e integral para funções, com duas ou mais variáveis, depende tanto das ferramentas de Cálculo diferencial e integral para funções de uma variável, quanto das operações vetoriais vistas em Álgebra Linear atribuindo, assim, ao ensino-aprendizagem mais pré-requisitos. Ressalta-se, ainda, a importância do uso de softwares educacionais como o GeoGebra, trazendo uma construção geométrica, a fim de melhorar a assimilação dos conteúdos.

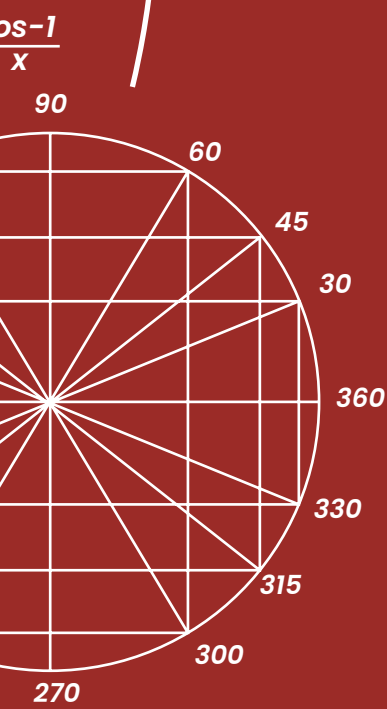
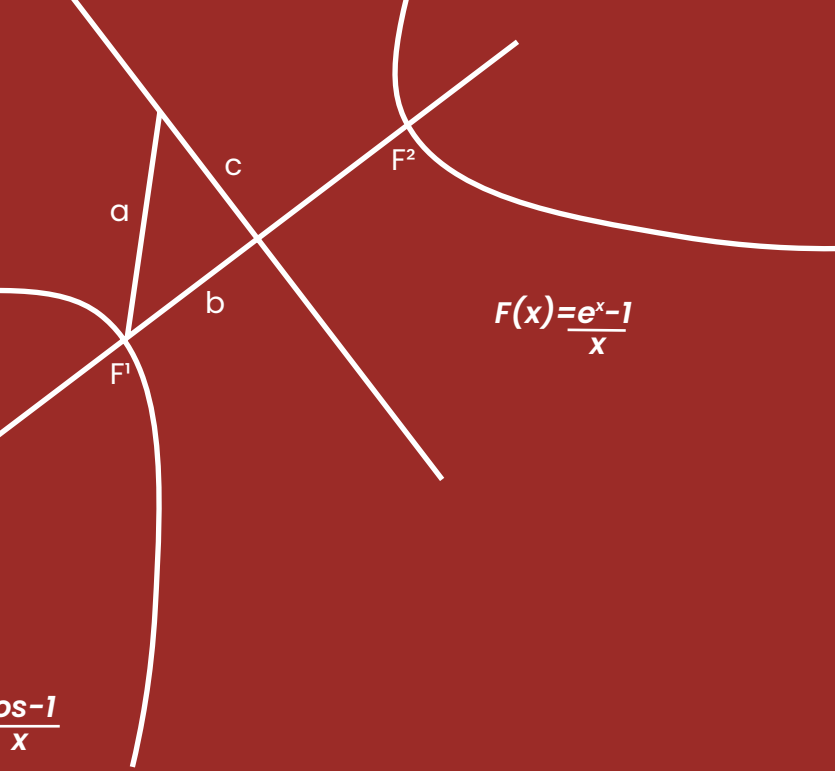
É importante que o leitor execute alguns comandos no software utilizado para cada sessão, pois os objetos do Cálculo, neste caso, as curvas - planas e espaciais e superfícies podem ser facilmente identificadas e, assim, ganhar mais familiaridade, facilitando a elaboração ou idealização de resolução de exercícios solicitados durante o decorrer da disciplina.

Se atentar também para as parametrizações é um recurso muito válido para as construções geométricas, mesmo que seja na associação com o mundo prático, pois na Engenharia é comum o estudante se deparar com cálculos que precisam do comprimento, curvatura e área da circunferência, por exemplo. Bem como nas aplicações envolvendo funções com duas ou mais variáveis, nos problemas de otimização dentro de uma indústria.

À medida que o leitor conseguir enxergar e perceber as particularidades de cada objeto no seu específico ambiente, fazendo o plote das superfícies no software GeoGebra, dará mais suporte para que se possa realizar os cálculos exigidos em questões mais construtivas. O uso de tecnologia é primordial para os estudantes de Engenharia, uma vez que se consegue examinar com mais exatidão uma determinada propriedade ou cálculo que venha ser solicitado.

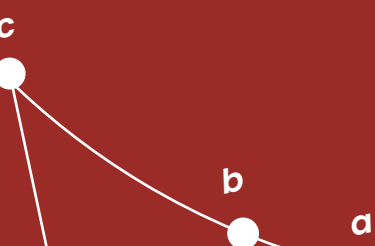
Os tópicos tratados aqui foram construídos juntamente com a ministração da disciplina de Cálculo II para os cursos de Engenharia da Escola Superior de Tecnologia (EST) da Universidade do Estado do Amazonas (UEA), trazendo uma linguagem mais acessível, com o intuito de preencher lacunas do saber para os leitores.

Os exemplos e exercícios resolvidos, em sua maioria, são exemplos ou exercícios do livro *Cálculo, volume 2*, de James Stewart (2017), uma vez que a literatura é rica em exemplos contextualizados os quais, aqui, serão ilustrados com o uso de software (sempre que possível) e cálculos, que foram executados em sala de aula ou esclarecimentos provindos das dúvidas dos em sala de aula.



# Funções Vetoriais

Capítulo 01



As funções vetoriais se tornam uma espécie de revisão do conteúdo visto em “Cálculo diferencial e integral para funções com uma variável”, porém permite a parametrização de curvas, inclusive as que foram vistas em “Álgebra Linear - as cônicas”, ampliando o universo tanto no espaço bidimensional como tridimensional. A noção de cálculo será replicada de acordo com o espaço de chegada de tais funções, podendo-se inclusive identificar as curvas que ora dependem de um parâmetro com uma função dependendo de uma variável real.

## 1.1 Funções Vetoriais

**Definição:** Uma função do tipo  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função vetorial, onde  $I$  é um intervalo real. Sendo definida a partir de um parâmetro real e tomando valores no espaço - dimensional.

Logo, entendemos a função vetorial por:

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

onde cada uma das  $f_i(t)$  são chamadas de *funções coordenadas* ou *funções paramétricas* que dependem do parâmetro  $t \in I$ .

**Nota:** Perceba que a cada parâmetro  $t_0$  se associa um ponto de  $n$  coordenadas.

## 1.2. Domínios, Imagens e Traços de uma Função Vetorial

Claramente como são funções, iremos estudar os elementos básicos estudados sobre funções, a saber, domínio, imagem e gráfico, sendo que neste caso o gráfico de funções vetoriais será retratado como traço de uma curva.

O domínio das funções vetoriais se atém as mesmas restrições de Cálculo com uma variável, o que se diz respeito à boa definição das funções coordenadas, como, por exemplo: funções escritas como quocientes, raízes ou ambas. Logo, se determinando o conjunto ideal para cada uma das funções coordenadas  $-D(f_i)$ , podemos ter a interseção de tais domínios  $-\cap D(f_i)$ , constituindo o domínio  $D$  da função vetorial como um todo.

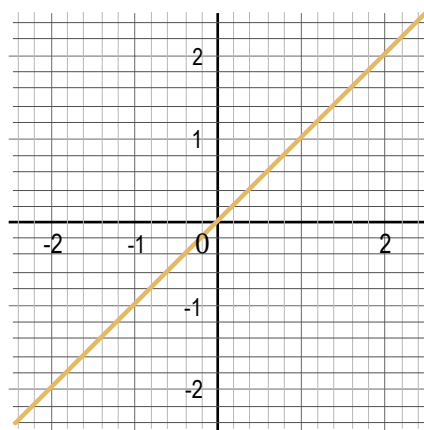
Para se determinar a Imagem e o traço de tais funções, precisa-se fazer uma identificação do espaço de chegada com um ponto do espaço  $\mathbb{R}^n$ . Manipulando o sistema bem trivial conseguimos expressar a função paramétrica associada com uma função de uma variável real.

**Exemplo 1.** Considere a função  $\gamma(t) = (t, t)$ . Associando as funções coordenadas com um ponto no plano i.e,  $(x, y)$ , temos um sistema trivial

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \quad (1)$$

o qual podemos associar à função real  $y = x$ , cujo traço é uma reta crescente passando pela origem do sistema (Ver Figura 1).

**Figura 1.** Traço da função  $\gamma$



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

De acordo com as funções coordenadas em (1), vemos claramente que não se têm restrições, assim sendo, o domínio  $D(\gamma) = \mathbb{R}$ . Como visto pela associação, a imagem da função é todo o  $\mathbb{R}^2$ .

No exemplo a seguir iremos demonstrar a obtenção do intervalo real que será definido como o domínio da função vetorial.

**Exemplo 2.** Considere a função vetorial dada por  $\gamma(t) = \left(\frac{t-3}{\sqrt{2t-4}}, \frac{t^2}{t^2-4}, \ln(9-3t)\right)$ , restrição em relação ao parâmetro. Identificando as funções coordenadas e escrevendo os seus respectivos domínios.

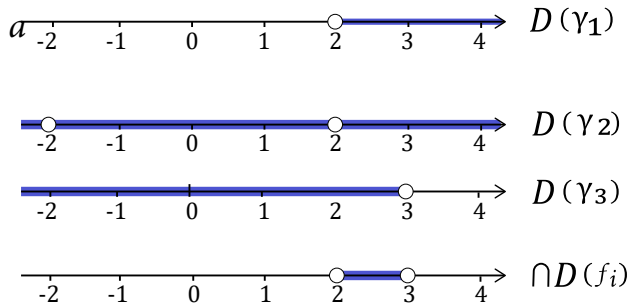
$\gamma_1(t) = \frac{t-3}{\sqrt{2t-4}}$ , onde o seu domínio é  $D(\gamma_1) = \{t; \in \mathbb{R} \mid 2t - 4 > 0\} = \{t; \in \mathbb{R} \mid t > 2\}$ , visto que no numerador não possuímos restrição.

$\gamma_2(t) = \frac{t^2}{t^2-4}$ , onde o seu domínio é  $D(\gamma_2) = \{t; \in \mathbb{R} \mid t \neq -2 \text{ e } t \neq 2\}$

$\gamma_3(t) = \ln(9-3t)$  e seu domínio é  $D(\gamma_3) = \{t; \in \mathbb{R} \mid t < 3\}$ , uma vez que a função logarítmica só funciona para valores positivos no logaritmando.

Descrevendo em termos de conjuntos cada um dos domínios e fazendo a interseção.

Figura 2. Imagem ilustrativa do conjunto numérico



Fonte: App GeoGebra

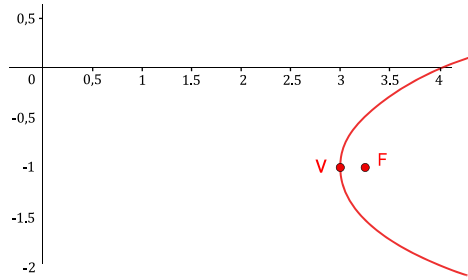
O gráfico das funções vetoriais será especificado em relação ao espaço de chegada. Quando temos  $n = 2$ , iremos obter as curvas planares e, quando  $n = 3$ , teremos as curvas espaciais.

**Exemplo 3.** Seja a função vetorial dada por  $\gamma(t) = (t^2, +3t - 1)$ . Ao identificarmos as funções coordenadas, por:

$$\begin{cases} x = t^2 + 3 \\ y = t - 1 \end{cases} \quad (2)$$

Isolando  $t$  em relação à segunda equação no sistema e substituindo na primeira, obtemos a equação de uma parábola  $x = (y + 1)^2 + 3$ , cujo Foco  $C(\frac{13}{4}, -1)$  localizado no eixo das ordenadas e transladada 3 unidades no eixo das abscissas.

**Figura 3.** Traço da parábola



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

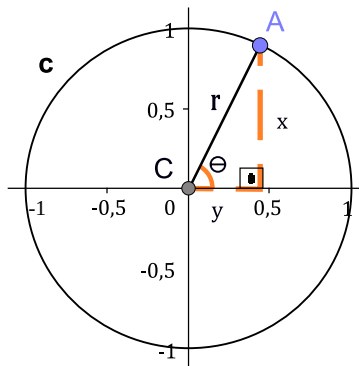
Com base na análise do traço contido na Figura 3 podemos destacar que o domínio é válido para  $t \in \mathbb{R}$ , uma vez que as funções coordenadas não possuem restrições e a imagem  $Im(\gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 3\}$ .

### 1.3. Principais parametrizações de Curvas

Muitas das curvas conhecidas têm uma parametrização simples de construção, mas outras dependem de funções trigonométricas o que já torna o cálculo mais extenso. Vejamos alguns exemplos importantes para a construção de traços de curvas planas e espaciais. Note que se uma curva não possui apenas uma única parametrização e quando usa-se alguma parametrização para uma curva, dizemos que a curva é parametrizada.

**Exemplo 4: [Parametrização de uma circunferência]** Dada uma circunferência de raio 1 e centro na origem (conforme Figura 4).

**Figura 4.** Circunferência de raio 1 e centro na origem



**Fonte:** App GeoGebra

Seja um ponto  $A$  pertencente à circunferência, considere suas respectivas projeções nos eixos das abscissas e das ordenadas. O triângulo formado é retângulo com hipotenusa igual ao raio 1. Estabelecendo as relações métricas num triângulo retângulo em relação ao ângulo  $\theta$ , temos:

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \quad (3)$$

Logo, a parametrização da circunferência é dada por  $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ , com  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Nota:** À medida que o ângulo  $\theta$  cresce, o sentido da curva se dá no sentido anti-horário, conforme mostra Quadro 1.

**Quadro 1.** Amostra contendo ângulos na forma crescente e seus respectivos pontos

Medida do ângulo $\theta$	Ponto $(\cos\theta, \sin\theta)$
$0^0$	$(1,0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$

Fonte: Da autora

Em particular, a parametrização de uma circunferência de raio  $r$  é dada por:

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \quad (4)$$

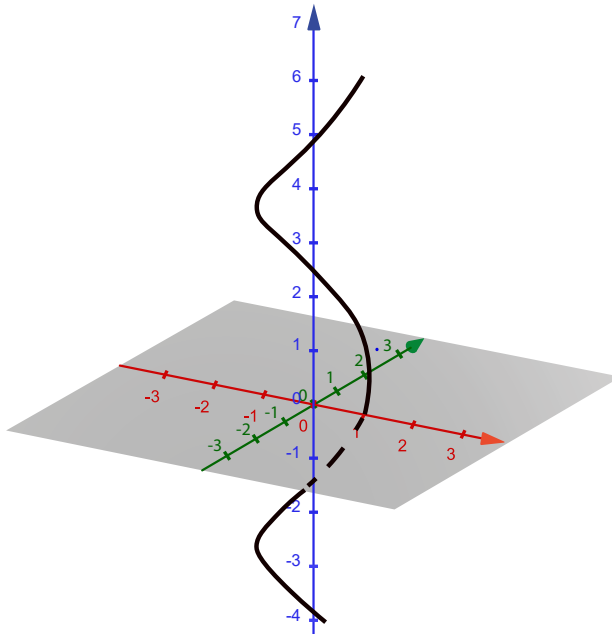
A equação (4) define o que chamaremos de coordenadas polares. Perceba que mesmo não utilizando  $\theta$  para denotar ângulos, subentende-se que o parâmetro  $t$  está associado a ângulos, visto que as funções coordenadas são funções trigonométricas.

Um exemplo de uma curva espacial muito utilizada é a Hélice Circular dada por:  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ . Descrevendo as funções coordenadas identificadas com um ponto do plano 3D, temos:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad (5)$$

As duas primeiras equações em (5) conforme o Exemplo 4 descreve uma circunferência de raio 1 e centrada na origem, i.e, o parâmetro  $t$  é medido como ângulo, e já na terceira equação, o valor do parâmetro é transformado para o valor aproximado de  $\pi$ . Podemos pensar em  $z = t$  como sendo um vetor que cresce descrevendo um formato circular e assim gerando a Hélice Circular.

**Figura 5.** Hélice Circular - Curva Espacial



**Fonte:** App Geogebra Calculadora 3D

A seguir, o Quadro 2 mostra as principais curvas e suas respectivas parametrizações.

**Quadro 2.** Parametrizações de Curvas Importantes

Nome da Curva	Parametrização
Reta em 2D	$\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt);$ $P_0(x_0, y_0)$ ponto inicial $v = (a, b)$ vetor diretor
Reta em 3D	$\gamma(t) = (x_0 + a, y_0 + bt, z_0 + ct);$ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ponto inicial $v = (a, b, c)$ vetor diretor
Parábolas com eixo sobre o Eixo das Ordenadas	$\gamma(t) = (dt + e, at^2 + bt + c)$
Parábolas com eixo sobre o Eixo das Abscissas	$\gamma(t) = (at + bt + c, dt + e)$
Elipse* (*Eixo maior dependendo da condição $a > b$ ou vice-versa)	$\gamma(t) = (x_0 + acost, y_0 + bsent);$ $(x_0, y_0)$ Centro $a$ Semieixo maior $b$ Semieixo menor
Hipérbole com eixo sobre o Eixo das Abscissas	$\gamma(t) = (x_0 + a \text{sect}, y_0 + b \text{tgt}), t \in$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2});$ $(x_0, y_0)$ Centro
Hipérbole com eixo sobre o Eixo das Ordenadas	$\gamma(t) = (x_0 + a \text{sect}, y_0 + b \text{tgt}), t \in$ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2});$ $(x_0, y_0)$ Centro
Circunferência de raio $r$ com centro em $(x_0, y_0)$	$\gamma(t) = (x_0 + r \text{cost}, y_0 + r \text{sent});$ $r$ raio $(x_0, y_0)$ Centro

Fonte: Da autora

## 1.4. Cálculo de Limites, Derivadas e Integrais de Funções Vetoriais

Iremos abordar, de maneira bem sucinta, algumas das técnicas, principais teoremas e corolários para a execução dos cálculos de limite, derivada e integral de funções vetoriais, cujas demonstrações podem ser encontradas em [1] ou em [2].

Para o cálculo de Limite de funções, tudo ocorrerá em função do parâmetro  $t$ . Então, a aproximação do limite se dará em termos de aproximação  $|t - t_0| < \delta$  implicando na aproximação de  $|f(t) - L| < \epsilon$  sendo  $\delta$  suficientemente pequeno e  $\epsilon$  positivo. Caso exista essa convergência, dizemos que  $L \in \mathbb{R}^n$  é o limite da função vetorial  $f$  quando  $t$  se aproxima de  $t_0$ , denotado por

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$$

Caso a função seja contínua, o limite  $L$  coincide com  $f(t_0)$ .

Lembrando que neste caso, já será validado o Teorema de L'Hospital, Limites Fundamentais e técnicas de cálculo de limites para quando a função não estiver definida no ponto dado. Ver [3].

**Exemplo 5.** Sendo a função vetorial dada por  $\gamma(t) = \left(\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}, \frac{1-\cos(t-1)}{2t-2}\right)$ , verifique que o  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t)$  é igual a  $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ . Claramente, a função  $\gamma$  não está definida para o parâmetro  $t = 1$ . Porém, ambas funções coordenadas estão condizentes com as hipóteses do Teorema de L'Hospital.

Para a função coordenada  $\gamma_1(t) = \frac{\sqrt{t}-1}{t-1}$  o cálculo do limite prossegue como:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{t}-1}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{1} = \frac{1}{2}$$

e para a função coordenada  $\gamma_2(t) = \frac{1-\cos(t-1)}{2t-2}$  que pode ser resolvida até mesmo por uma substituição e chegaremos num limite fundamental, a saber,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-\cos t}{t} = 0$ . Assim  $\frac{1}{2} \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1-\cos(w)}{w}$ , onde  $w = t - 1$  (Substituição feita no limite).

Para o cálculo de derivadas também se herdarão todas as propriedades de derivação, Regra da Cadeia, Regras de derivação para funções algébricas, trigonométricas e logarítmicas de funções com uma variável. Ver [3].

**Exemplo 6.** Sendo a função vetorial  $f(t) = \left(\frac{t-5}{t}, \ln(2t+1)\right)$ . A derivada da função  $f$  quando o parâmetro  $t$  é igual a 1 vale  $\left(-5, \frac{2}{3}\right)$ .

Identificando as funções coordenadas, obtemos:  $f_1(t) = \frac{t-5}{t}$  no qual precisaremos da regra do produto, como a seguir:

$$f_1'(t) = \frac{(t-5)' \cdot (t) - (t-5) \cdot (t)'}{t^2} = \frac{1 \cdot t - t - 5}{t^2} = \frac{-5}{t^2}$$

Portanto,  $f_1'(1) = -5$ .

Já  $f_2(t) = \ln(2t + 1)$ . Para calcular a derivada iremos aplicar a regra da cadeia, utilizando a regra de derivação de funções logarítmicas.

$$\text{Logo, } f_2'(t) = \frac{1}{2t + 1} \cdot 2 = \frac{2}{2t + 1}. \text{ Segue que } f_2'(1) = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Portanto, } f'(1) = \left(-5, \frac{2}{3}\right).$$

Uma das aplicações do estudo de derivadas é a determinação da reta tangente ao gráfico num ponto pré-determinado. A única coisa que será diferente será a escrita da reta, que segue na sua forma vetorial, conteúdo de Álgebra Linear.

Sempre lembrando que, para a determinação de uma reta, precisamos de um ponto pertencente à reta e o vetor diretor da reta, que, neste caso, será o vetor derivado da função aplicado no ponto especificado.

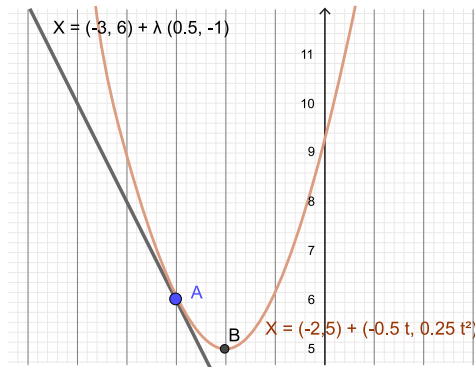
**Exemplo 7.** A reta tangente ao gráfico da função  $f(t) = (t, -2t^2 + 5)$  no ponto  $(-3, 6)$ . Perceba que a escrita da reta tangente deverá fazer menção ao parâmetro. Assim, o parâmetro associado ao ponto  $A = (-3, 6)$  da curva se refere ao parâmetro  $t = -1$ .

Já temos, assim, o ponto pertencente à reta, que, naturalmente, é um ponto do traço da função. Tem-se agora que calcular o vetor tangente à curva nesse parâmetro.

$f'(t) = (1, 2t)$  o que acarreta  $f'(-1) = (1, -2)$ , o qual é o vetor diretor da reta tangente.

Logo,  $r: \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 6 - 2\lambda \end{cases}$  é a reta tangente na sua forma vetorial, onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é o parâmetro da reta.

**Figura 6.** Construção do traço da função e reta tangente ao traço no ponto A



Fonte: App GeoGebra Gráfica

Passamos, agora, para a integral de funções vetoriais, na qual vários métodos de integração são necessários como: substituição simples e trigonométrica, integração por partes e método das frações parciais. Seja para o cálculo de integrais definidas ou indefinidas.

**Exemplo 8.** Dada a função  $f(t) = \left(\frac{t-5}{t^2-4}, te^t\right)$ . Verifique que a integral definida de  $f$  variando de  $t = 3$  a  $t = 1$  vale  $(-0.2; 123,6)$ .

Para calcular a integral da função coordenada  $f_1(t) = \frac{t-5}{t^2-4}$  temos que executar o método de frações parciais. No caso, o denominador é fatorado, via diferença entre quadrados, como  $(t-2)(t+2)$ .

Isto significa que podemos "quebrar" a fração:

$$\frac{t-5}{t^2-4} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+2} = \frac{A(t+2) + B(t-2)}{t^2-4}$$

Fazendo igualdade de polinômios e resolvendo o sistema, encontramos

$$A = -\frac{3}{4} \text{ e } B = \frac{7}{4}$$

Calculando a integral:

$$\int_3^4 \frac{t-5}{t^2-4} dt = -\frac{3}{4} \ln|t-2| + \frac{7}{4} \ln|t+2| \Big|_3^4 = -\frac{3}{4} \ln 2 + \frac{7}{4} \ln 6 + \frac{3}{4} \ln 1 - \frac{7}{4} \ln 5 = -\frac{3}{4} \ln 2 + \frac{7}{4} \ln 6 - \frac{7}{4} \ln 5$$

Na função coordenada  $f_2(t) = te^t$  temos que utilizar o método de integração por partes, seguindo a ordem dada por LIATE, onde  $L$  associa funções logarítmicas,  $I$  funções inversas,  $A$  funções algébricas,  $T$  funções trigonométricas e  $E$  funções exponenciais.

Fazendo a substituição:  $u = t$ , onde  $\frac{du}{dt} = 1$  e  $dv = e^t dt$  ou seja,  $v = e^t$ .

Temos:

$$\int_3^4 te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t \Big|_3^4 = 4e^4 - e^4 - (3e^3 - e^3) = 3e^4 - 2e^3$$

Portanto,  $\int_3^4 \left(\frac{t-5}{t^2-4}, te^t\right) dt = \left(-\frac{3}{4} \ln 2 + \frac{7}{4} \ln 6 - \frac{7}{4} \ln 5, 3e^4 - 2e^3\right) = (-; 0.2123,6)$

## 1.5. Algumas Operações Vetoriais entre Funções Vetoriais

Enxergando as funções vetoriais como vetores no espaço de chegada, podemos implementar algumas operações que já foram vistas em Álgebra Linear em se tratando dos produtos entre vetores.

Dadas curvas  $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$  e  $\gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ , podemos fazer as seguintes operações:

$$\text{I) } (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) + y_1(t) \cdot y_2(t) + z_1(t) \cdot z_2(t)$$

**(Produto Interno ou Escalar)**

$$\text{II) } (\gamma_1 \times \gamma_2)(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1(t) & y_1(t) & z_1(t) \\ x_2(t) & y_2(t) & z_2(t) \end{vmatrix}$$

**(Produto Externo ou Vetorial)**

Sendo as operações ainda dependentes do parâmetro, pode-se calcular as respectivas derivadas e substituir o parâmetro ao final, ou, pode-se ainda calcular as derivadas via Regra de derivação para produto de funções, desde que preservando a operação associada, como a seguir:

$$\text{I) } (\gamma_1 \cdot \gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t) \cdot \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \cdot \gamma_2'(t)$$

$$\text{II) } (\gamma_1 \times \gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t) \times \gamma_2(t) + \gamma_1(t) \times \gamma_2'(t)$$

Tais operações são importantes para as aplicações que faremos na próxima sessão, para o cálculo da curvatura de curvas.

## 1.6. Cálculo de Áreas usando Funções Vetoriais

Nesta sessão faremos uma comparação entre os métodos vistos em Cálculo diferencial e integral para o cálculo de áreas para funções de uma variável com as Funções vetoriais, haja vista que precisamos fazer uma adaptação da fórmula para que dependa apenas do parâmetro  $t$ .

Ao calcularmos a área compreendida entre o gráfico de uma função real  $f = f(x)$  tal que  $f(x) > 0$  associamos a integral definida:

$$A = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx \quad (6)$$

Trabalhando com uma função vetorial  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$  na qual, ao associarmos a imagem com um ponto do  $\mathbb{R}^2$ , obtemos:

$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}$$

Podemos reescrever a equação (6) substituindo as funções coordenadas,

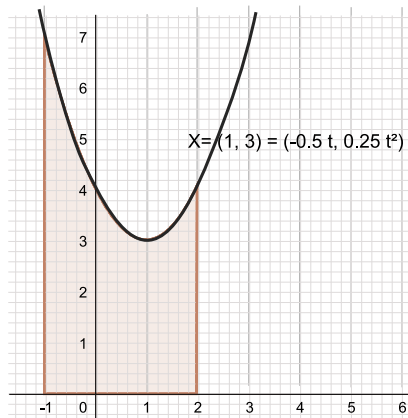
$$A = \int_{t_0}^{t_1} f_2(t) f_1'(t) dt \quad (7)$$

na qual o parâmetro  $t_0$  é associado ao ponto de abscissa  $a$  e o parâmetro  $t_1$  é associado ao ponto de abscissa  $b$ .

**Nota:** É sempre importante em funções vetoriais deixar tudo em função do parâmetro.

**Exemplo 9.** Calcule a área compreendida entre a curva dada por  $\gamma(t) = (t, +1t^2 + 3)$  e as retas  $x = -1$  e  $x = 2$ .

**Figura 7.** Traço do gráfico e sua respectiva área



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

**Resolução:** Para iniciar: temos que esboçar o gráfico da função no plano e identificar os *pontos de interseção*, para que possamos identificar os parâmetros associados.

Para que  $x = -1$ , temos  $t + 1 = -1$ , logo o parâmetro  $t = -2$

Analogamente, para que  $x = 2$ , temos o parâmetro  $t = 1$

Assim, a área será dada por:

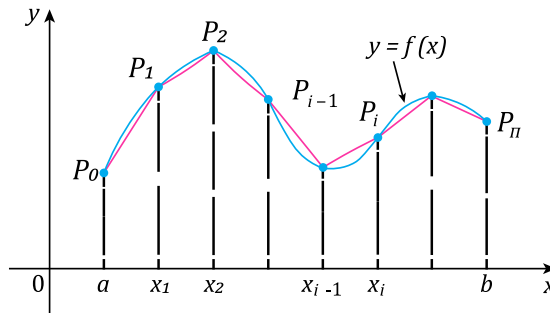
$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 (t^2 + 3) dt = \left. \frac{t^3}{3} + 3t \right|_{-2}^1 = \left( \frac{1^3}{3} + 3 \cdot (1) \right) - \left( \frac{(-2)^3}{3} + 3 \cdot (-2) \right) \\ &= \frac{10}{3} - \left( \frac{-26}{3} \right) = \frac{36}{3} = 12 \text{ u. a.} \end{aligned}$$

## 1.7. Comprimento de uma Curva

Um das aplicações mais relevantes do cálculo diferencial aplicado a funções vetoriais são: o cálculo do comprimento de uma curva e o cálculo da curvatura de uma curva. Esta é uma área da Matemática muito interessante conhecida como *Geometria Diferencial*. Ver [4].

De maneira análoga ao cálculo do comprimento de uma curva para uma função de uma variável  $y = f(x)$  onde considera-se uma partição do intervalo  $(a,b)$ , conforme Figura 8.

**Figura 8.** Visualização da Partição do intervalo  $(a,b)$  no eixo das abscissas e a aproximação linear pelo segmento poligonal  $P = P_i(x_i, y_i)$



Fonte: Stewart, 2017

**Nota:** Quanto maior é o refinamento da partição, melhor é a aproximação.

Assim, o comprimento da curva é aproximado pelo  $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_{i-1}P_i|$ . Por outro lado, o comprimento de um segmento poligonal é dado por:

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad (8)$$

Mas de posse do Teorema do Valor Médio, sabemos que existe um ponto  $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$  tal que:

$$f(x_{i-1}) - f(x_i) = f'(x_i^*)(x_{i-1} - x_i)$$

Ou seja:

$$\Delta y = f'(x_i^*)\Delta x \quad (9)$$

Substituindo (9) em (8);

Temos o cálculo do comprimento de uma curva dada por:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \int_a^b \sqrt{1 - (f'(x))^2} dx \quad (10)$$

**Definição: [Curva diferenciável]** Uma curva parametrizada é uma curva diferenciável, ou seja, uma aplicação diferenciável  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) \dots \gamma_n(t))$ , se as funções coordenadas  $\gamma_i(t)$  forem diferenciáveis  $\forall i = 1, \dots, n$ .

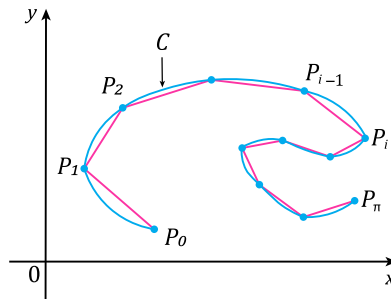
**Nota:** Uma função é dita diferenciável (ou suave) se ela possui, em todos os pontos, derivadas de todas as ordens. Mas precisamente a função é de classe  $C^\infty$ . Ver [4].

**Definição: [Comprimento da curva]** Considere uma curva diferenciável parametrizada y regular, i.e,  $\gamma'(t) \neq 0, \forall t \in I \subset \mathbb{R}$  (Conforme a Figura 8). Então o comprimento da curva y denotado por  $l(y)$  num intervalo  $\alpha < t < \beta$  é dado por:

$$l(t) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt$$

Para exemplificar, assuma que  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tem-se  $\gamma(t) = (f(t), g(t))$  ou associando a um par do  $\mathbb{R}^2$ , a saber,  $x=f(t)$ ,  $y=g(t)$  e os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  associados aos pontos  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ .

**Figura 9.** Traço de uma curva aproximada por vetores tangentes nos pontos  $P_i$ 's



**Fonte:** Stewart, 2017

Assumindo que  $\gamma'(t) \neq 0$ , temos a garantia de que ambas  $x'(t) \neq 0$  e  $y'(t) \neq 0$ . Podemos ter o Teorema do Valor Médio válido para ambas funções coordenadas e assim ter:

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{(f'(t_i^*)\Delta t)^2 + (g'(t_i^{**})\Delta t)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{f'(t_i^*)^2 + g'(t_i^{**})^2} \Delta t
 \end{aligned}$$

Assumindo que  $t_i^*$  e  $t_i^{**}$ , uma vez que  $f'$  e  $g'$  são contínuas, temos que o comprimento de uma curva é dado pela integral definida do comprimento do vetor tangente dentro do intervalo considerado.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt \quad (11)$$

**Exemplo 10.** Mostre que o comprimento de uma circunferência de raio  $r$  é igual a  $2\pi r$ .

**Resolução:** Considere a parametrização da circunferência de raio  $r$  (Ver Quadro 2) por

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in (0, 2\pi)$$

Utilizando a fórmula em (11), temos:

$$\gamma'(t) = (-r \sin t, r \cos t) \text{ cujo comprimento é } |\gamma'(t)| = r$$

Portanto,

$$l = \int_0^{2\pi} r dt = r \cdot t \Big|_0^{2\pi} = r2\pi = 2\pi r$$

## 1.8. Curvatura de uma Curva

Para conseguirmos calcular a curvatura de uma curva, que é o traço de uma função vetorial, precisamos reparametrizar a curva, a fim de que possamos calcular sobre a curva.

**Definição: [Parametrização pelo comprimento de arco]** Seja  $s = s(t)$  a função do comprimento de arco da parte da curva  $\gamma = \gamma(t)$ ,  $0 < t < a$  que vai de  $a$  até  $t$  definida por:

$$s(t) = \int_0^t |\gamma'(t)| dt \quad (12)$$

**Exemplo 11.** Reparametrize a reta dada por  $\gamma(t) = (-1 + t, 5 + 3t, 4 - 2t)$  pelo comprimento de arco medido a partir do seu ponto inicial na direção de crescimento de  $t$ .

**Resolução:** O ponto inicial da reta é o ponto  $P_0(-1, 5, 4)$  cujo parâmetro associado é  $t = 0$

A função  $\gamma'(t) = (1, 3, -2)$  com  $|\gamma'(t)| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$

Assim, pela equação (12), temos:

$$s = \int_0^t \sqrt{14} \, dt = \sqrt{14} t$$

Assim, a reta parametrizada pelo comprimento de arco é dada por:

$$\gamma(s) = \left( -1 + \frac{s}{\sqrt{14}}, 5 + \frac{3s}{\sqrt{14}}, 4 - \frac{2s}{\sqrt{14}} \right)$$

**Definição: [Curvatura de uma curva]** Considere uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , dada por  $\gamma = \gamma(s)$  com  $\gamma'(s) \neq 0 \forall t$ . Em cada ponto podemos ter o vetor tangente unitário,  $T$ , à curva. Definimos a curvatura como sendo ao módulo da taxa de variação de  $T$  ao longo da curva em cada ponto. Assim:

$$k = \left| \frac{dT}{ds} \right| \quad (13)$$

Se quisermos tornar a curvatura em função do parâmetro, basta lembrar que  $T(s(t))$ , i.e, o vetor tangente unitário depende de  $s$ , mas  $s$  depende de  $t$ .

Usando a regra da Cadeia, obtemos:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad (14)$$

Isolando a taxa de variação de  $T$  em relação à  $s$  em (14) e substituindo em (13), temos:

$$k(t) = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{T'(t)}{\gamma'(t)} \right| = \frac{|T'(t)|}{|\gamma'(t)|} \quad (15)$$

Note que a equação (15) fica dependente apenas do parâmetro.

**Exemplo 12.** Mostre que a curvatura da circunferência de raio  $r$  é  $k = \frac{1}{r}$

**Resolução:** Tomando a parametrização da circunferência por  $\gamma(t) = (rcost, rsent)$ . Calculamos:

$$\gamma'(t) = (-rsent, rcost), |\gamma'(t)| = r$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = (-sent, cost)$$

$$T'(t) = (-cost, -sent), |T'(t)| = 1$$

Logo, substituindo as informações acima na equação (15):

$$k(t) = \frac{1}{r}$$

A curvatura da circunferência é constante igual a  $\frac{1}{r}$  e nos diz que a curvatura é inversamente proporcional ao raio. Ou seja, quanto maior é o raio, menor é a curvatura e vice-versa.

**Exemplo 13.** Mostre que a curvatura da reta é nula.

**Resolução:** Considere a parametrização de uma reta  $\gamma(t) = (x_0 + at, y_0 + bt)$  de acordo com o Quadro 1.

Para verificar a curvatura precisamos fazer os seguintes cálculos:

$$\gamma'(t) = (a, b) \text{ com } |\gamma'(t)| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$T'(t) = (0, 0) \text{ com } |T'(t)| = 0.$$

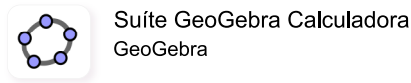
Logo, a curvatura é:

$$k(t) = \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0, \forall t$$

## 1.9. Uso do software GeoGebra para plotagem de Curvas Planares e Espaciais

O software GeoGebra (Ver Figura 10) é um software livre, que ocupa pouco espaço e pode ser facilmente instalado em aparelhos celulares, tablets ou computador.

**Figura 10.** Ícone do App GeoGebra



**Fonte:** Suíte GeoGebra Calculadora<sup>1</sup>

No aparelho celular, acesse App - Suíte GeoGebra, e instale o aplicativo, o qual dará acesso às calculadoras: Gráfica (que no caso plota gráficos em 2D), 3D (que plota gráfico em 3D), entre outras, conforme pode ser observado na Figura 11.

**Figura 11.** Acesso às Calculadoras no App Suíte GeoGebra



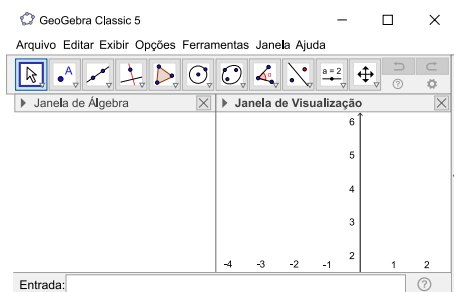
**Fonte:** Suíte GeoGebra Calculadora

Para plotar os gráficos das curvas, coloca-se sua parametrização na Entrada do aplicativo GeoGebra (Conforme Figura 12).

---

<sup>1</sup> Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=org.geogebra.android.calculator.Suíte>

**Figura 12.** Visualização das Janelas dispostas no App GeoGebra Classic 5 - Versão para Computador

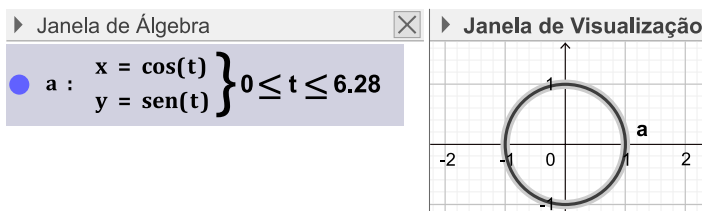


**Fonte:** Suíte GeoGebra Calculadora

Utilizando o comando:

Curva(<Expressão>, <Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>). Para curvas em 2D, basta utilizar as duas primeiras. Não esquecendo também, caso esteja trabalhando no computador de ajustar a visualização para 2D ou 3D, dependendo da curva a ser trabalhada.

**Figura 13.** Traço da circunferência com a sua devida expressão na Janela de Álgebra



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

Na Figura 3, traço de uma curva em 2D - Parábola. Utilizou-se o App Geogebra Gráfica.

Na Figura 4, traço da hélice circular - curva em 3D. Utilizou-se o App GeoGebra Calculadora 3D.

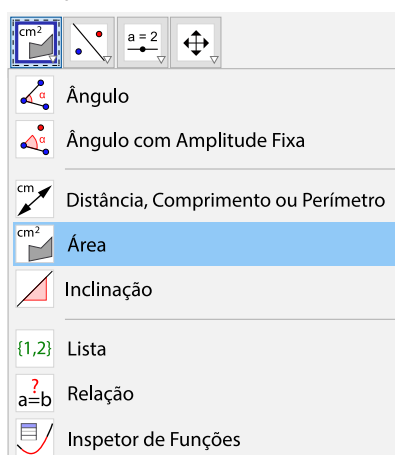
## 1.10. Uso do software GeoGebra para cálculo de Áreas

Para o cálculo de áreas, será utilizada a função Integral (<função>, <Valor de x inicial>, <Valor de x final>) na Entrada do software GeoGebra e, automaticamente, será esboçado o traço da curva, juntamente com suas delimitações e o valor da área (como na Figura 7).

**Nota:** Um dos problemas de se utilizar a função acima é que para algumas curvas, no caso das cônicas, não poderão ser calculadas de uma só vez. Neste caso deverá ser tomado uma parte (se possível simétrica) como uma função e somente depois do cálculo, multiplicada pelo número de vezes que se repete na porção negativa da função.

No caso de algumas figuras, como, por exemplo, o círculo poderá ser utilizado no botão de ferramentas do software GeoGebra o botão Círculo: Centro e Raio e, logo em seguida, o botão área (ver Figura 14), e clicar sobre o círculo mostrado na tela de visualização.

**Figura 14.** Identificação do botão na barra de ferramentas do GeoGebra



Fonte: App GeoGebra Gráfica

## 1.11. Cálculo do comprimento de uma curva no GeoGebra

Para o cálculo de comprimento de uma curva, basta escrever na Entrada a função Comprimento (<Curva>,<Valor de t inicial>,<Valor de t final>). Ao colocar cada uma das solicitações conforme o nome na Janela de Álgebra, o valor do comprimento aparecerá na Janela de Álgebra.

**Nota:** Neste caso o valor de  $\pi$  é aproximado com duas casas decimais de 3,14, assim, na Janela de Álgebra aparecerá seu valor numérico.

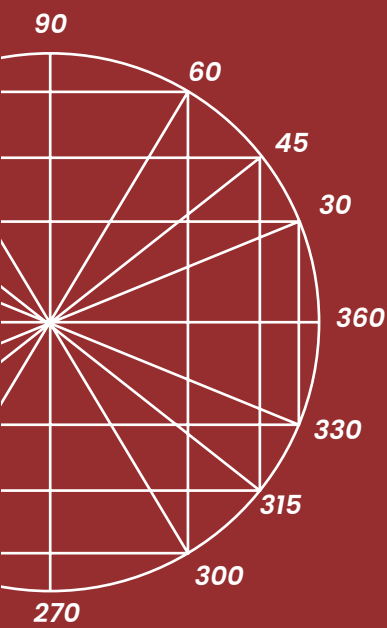
## 1.12. Cálculo da Curvatura de uma curva no GeoGebra

Após a colocação das equações paramétricas da curva (conforme item 1.9) e sua devida visualização no espaço adequado (2D ou 3D), usa-se o comando Curvatura (<Ponto>,<Objeto>).

**Observação:** Mesmo usando a parametrização para o plote do gráfico, o software só aceitará as coordenadas do ponto e o resultado claramente será dado na forma decimal.

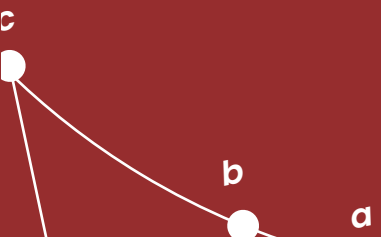


$f(x) = \frac{\cos^{-1}(x)}{x}$



# Funções com duas variáveis

Capítulo 02

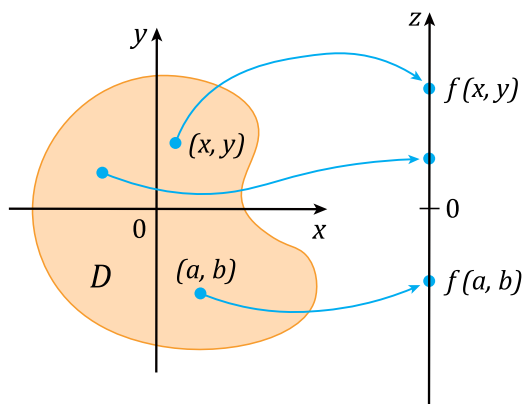


Neste capítulo, os objetos de estudo serão as chamadas Superfícies, que com auxílio das cônicas e quádricas vistos na disciplina de Álgebra Linear e de ferramentas do cálculo diferencial e integral, poderemos estender os conceitos, se habituando ao espaço trabalhado dentro de cada conjunto, quer seja no domínio ou na imagem, para conseguir ampliar os conceitos do cálculo diferencial e integral para funções com duas variáveis. Em alguns casos iremos precisar das chamadas curvas de níveis, para tentar entender o gráfico de algumas superfícies.

## 2.1. Funções com duas variáveis

Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a um par ordenado  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , um número real, a este tipo de função chamamos de função com duas variáveis.

**Figura 15.** Representação dos conjuntos associados na função



**Fonte:** Stewart, 2017

Como função, é necessário ter as preocupações de sempre, a saber: domínio, imagem e gráfico de funções. Neste caso, só temos que adaptar o conceito para o espaço a ser trabalhado. E falando em adaptação, no caso das funções de uma variável, trabalhamos com intervalos abertos, porém no  $\mathbb{R}^2$ , tais conjuntos são tratados como Bola com centro no ponto e raio  $\delta$ . Esta noção é trabalhada no ramo da matemática que trata da *Topologia do Espaço*.

## 2.2. Domínio (Região Admissível), Imagem e Gráfico de funções com duas variáveis

**Definição: [Domínio de uma função com duas variáveis]** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que o domínio de  $f$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  que permite que a função se realize. Como o domínio pode ser todo o  $\mathbb{R}^2$ , caso não possua restrição, ou uma parte do plano, podemos esboçar graficamente no plano a *Região Admissível* da função.

**Observação:** Em alguns casos de definição da função como uma função restritiva, ou seja, em geral definida como um quociente, raiz ou função trigonométrica ou logarítmica, devemos restringir o conjunto para que a função funcione para todos os elementos de dentro do domínio.

**Exemplo 14.** Qual o domínio de  $f(x,y) = \frac{2x+y}{\sqrt{3x-y-6}}$  e represente a região admissível.

**Resolução:** Note que a função  $f$  dada no problema é definida como um quociente e apresenta uma raiz no denominador. Logo, a restrição segue por:

$$3x - y - 6 > 0$$

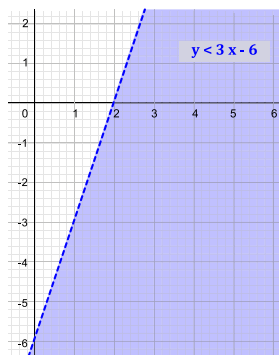
ou ainda:

$$y < 3x - 6 \quad (16)$$

Logo,  $D(f) = \{(x,y); \in \mathbb{R}^2 y < 3x - 6\}$

Na Figura 16, temos a representação da região admissível.

**Figura 16:** Representação da Região Admissível da função  $f(x,y) = \frac{2x+y}{\sqrt{3x-y-6}}$



Fonte: App GeoGebra Gráfica

**Definição: [Imagem de uma função com duas variáveis]** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . O conjunto Imagem da função  $f$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , no qual é “advindo” pela função de um ponto  $(x, y)$  do  $\mathbb{R}^2$ . Ou ainda:  $Im(f) = \{f(x, y) | (x, y) \in D(f)\}$ .

**Exemplo 15.** Identifique o conjunto imagem da função dada por  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ .

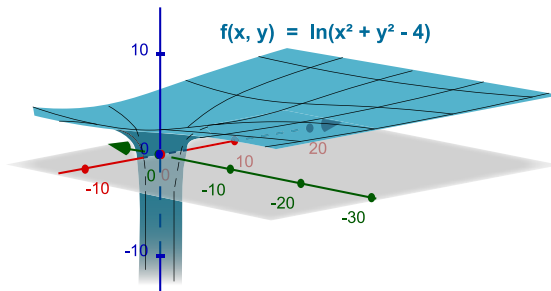
**Resolução:** Como a função é definida em termos de uma função logarítmica, temos a condição de existência do logaritmo, o qual impõe que o logaritmando  $x^2 + y^2 - 4 > 0$ . A restrição do domínio é definida pela inequação:

$$x^2 + y^2 > 4$$

Na Figura 17, percebe-se claramente que existe uma bola ou uma espécie de funil no qual os pontos não estão definidos, mas apesar disso os valores no eixo das cotas (Eixo z) estão sendo todos utilizados. Assim, o conjunto imagem de  $f$  é

$$Im(f) = \{\ln(x^2 + y^2 - 4) ; (x, y) \in D(f)\} = \mathbb{R}.$$

**Figura 17.** Gráfico da função  $\ln(x^2 + y^2 - 4)$

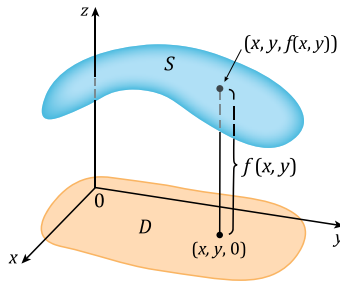


Fonte: App GeoGebra Calculadora 3D

**Definição: [Gráfico de Funções com duas variáveis]** O gráfico de uma função com duas variáveis será visualizado no  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ , isto é, um ponto do gráfico será especificado por:

$$Gr(f) = \{(x, y, f(x, y)) ; (x, y) \in D(f)\}$$

**Figura 18.** Ideia da representação dos pontos no gráfico de  $f$



**Fonte:** Stewart, 2017

Pode-se, neste caso, identificar o plote do gráfico utilizando ferramentas de álgebra linear como planos e quádricas, ou utilizando as chamadas curvas de níveis.

**Exemplo 16.** Plote o gráfico da função dada por  $f(x, y) = 3x - y + 4$

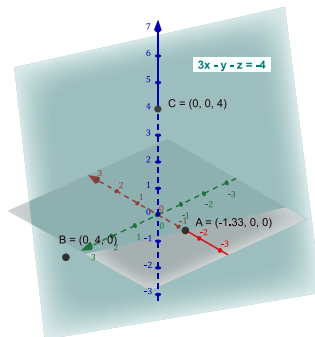
**Resolução:** Neste caso, fazendo a associação  $z = f(x, y)$ , temos:

$$3x - y - z + 4 = 0 \quad (17)$$

A equação (17) nos remete à equação do plano  $ax + by + cz + d = 0$ , com vetor normal  $n = (a, b, c)$ .

Para uma visualização gráfica mais simples, identifica-se os pontos que cortam cada eixo coordenado.

**Figura 19.** Visualização do Plano no espaço 3D



**Fonte:** App GeoGebra Calculadora 3D

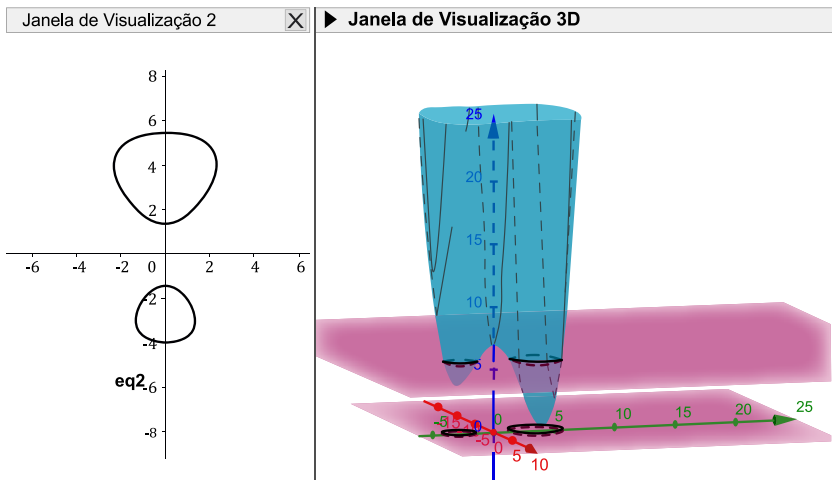
## 2.3. Curvas de Níveis

**Definição: [Curvas de Níveis]** Sendo  $z = f(x, y)$  uma função com duas variáveis e  $z = k_i, i = 0, \dots, n$ , onde  $k_i \in \mathbb{R}, \forall i$ . Interceptando o gráfico da função com tais planos, geram uma família de curvas no plano bidimensional. Essas curvas auxiliam o plote do gráfico da função, traçando um "fatiamento" da superfície.

Para a identificação da superfície gerada pela função, basta fazer o nível como sendo uma altura no eixo das cotas (Eixo  $z$ ) e plotando a curva, uma após a outra, cuja junção de todas elas formam a superfície solicitada.

**Observação:** Na construção das curvas de níveis usam-se as curvas vistas no Capítulo 1, entre elas, funções de uma variável (funções lineares, afins, trigonométricas e logarítmicas) e cônicas (Parábolas, Elipses, Hipérbole e Circunferências).

**Figura 20.** À esquerda: Curva de Nível 2D.  
À direita: Plano  $z = k$  interceptando a superfície  $f$



Fonte: App GeoGebra

**Exemplo 17.** Plote o gráfico da função no exemplo 16, sendo utilizada as curvas de níveis.

**Resolução:** Destaca-se no Quadro 3 as curvas em cada nível  $k_i$ .

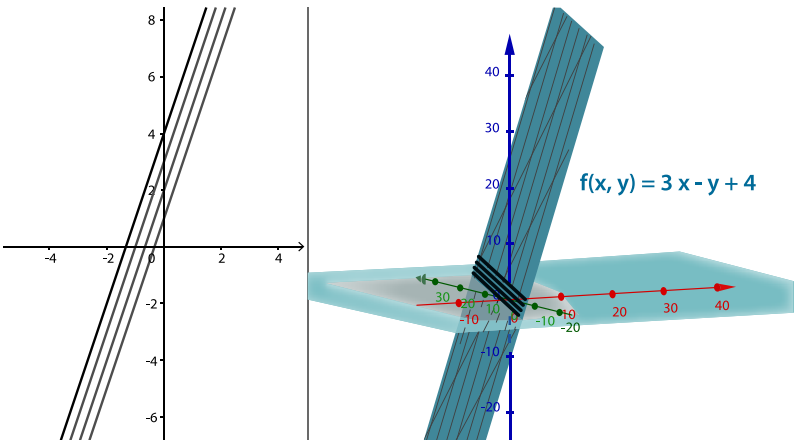
**Quadro 3.** Identificação dos níveis e curvas de níveis

Nível $z = k_i$	Equação	Representação
$k_0 = 0$	$3x - y = -4$	Reta Crescente
$k_1 = 1$	$3x - y = -3$	Reta Crescente
$k_2 = 2$	$3x - y = -2$	Reta Crescente
$k_3 = 3$	$3x - y = -1$	Reta Crescente

**Fonte:** Da autora

Na Figura 21, pode-se perceber que as retas geradas em cada nível não mudam o seu coeficiente angular e, depois da junção de uma após a outra, constrói-se o plano no espaço 3D.

**Figura 21.** À esquerda: Retas nos níveis especificados no Quadro 3. À direita: Plote da função (Plano)



**Fonte:** App GeoGebra

## 2.4. Principais Superfícies

No quadro 4 exibe-se as principais superfícies e suas respectivas equações.

**Quadro 4.** Principais Superfícies em  $\mathbb{R}^3$  (Considerando  $a, b, c, d, A, B, r \in \mathbb{R}$ )

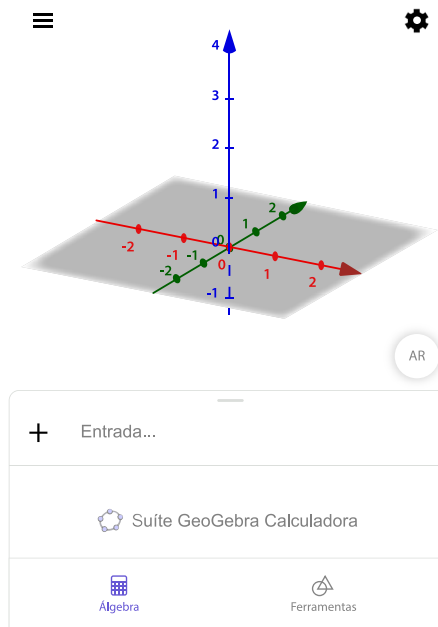
Nome da Superfície	Função	Curvas de Níveis
<i>Plano</i>	$f(x, y) = ax + by + c$	Retas $ax + by = d$
<i>Paraboloide</i>	$f(x, y) = a(x - x_0)^2 + a(y - y_0)^2 + b$	Circunferências $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ *O raio $r$ é definido a partir dos valores admissíveis para $k_i$ tornando-o positivo ( $r \geq 0$ )
<i>Paraboloide Elíptico</i>	$f(x, y) = a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + c$	Elipses $\frac{(x - x_0)^2}{A^2} + \frac{(y - y_0)^2}{B^2} = 1$ *Em algum nível pode-se obter um ponto
<i>Paraboloide Hiperboloide</i>	$f(x, y) = a(x - x_0)^2 - b(y - y_0)^2 + c$	Hipérboles $\frac{(x - x_0)^2}{A^2} - \frac{(y - y_0)^2}{B^2} = 1$ *Em algum nível pode-se obter retas concorrentes ** As hipérboles podem variar de eixos: horizontais e verticais
<i>Cone de duas folhas</i>	$f(x, y) = \pm \sqrt{a(x - x_0)^2 + b(y - y_0)^2 + c}$	Circunferências ( $a = b$ ) Elipses ( $a \neq b, ab > 0$ ) Hipérboles ( $a \neq b, ab < 0$ )

**Fonte:** Da autora

## 2.5. Uso do GeoGebra para plotagem de Superfícies

Com o aplicativo App Suíte GeoGebra (que contém todas as calculadoras), acione a Calculadora 3D (conforme Figura 22), para que se possa plotar o gráfico das funções com duas variáveis.

Figura 22. Visualização do espaço 3D –  $xyz$



Fonte: GeoGebra Calculadora

Na Entrada, utilizando o teclado virtual já contendo as principais funções, coloca-se a expressão da função e automaticamente será plotado o gráfico na visualização 3D. Clicando sobre o gráfico da função, tanto na janela algébrica quanto na própria superfície gerada, pode-se acessar configurações e modificar cor, nome, entre outros.

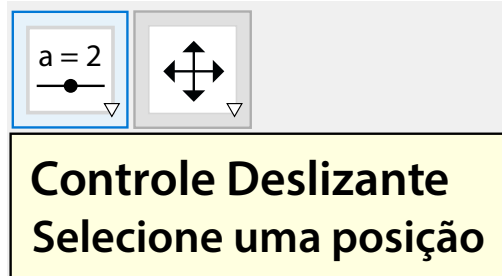
Na área de visualização, pode-se, também, retirar/colocar a malha, retirar/colocar os eixos coordenados e usando a lupa, pode-se diminuir ou ampliar a área de visualização.

Não necessariamente precisa-se nomear a função, pois essa atribuição é feita automaticamente.

## 2.6. Visualização das Curvas de Níveis no GeoGebra

Depois de já ter plotado a superfície no GeoGebra, teremos que colocar um controle deslizante.

**Figura 23.** Botão Controle Deslizante na Barra de Botões GeoGebra



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

Ao acionar o botão Controle Deslizante, o nome desse botão estará na Janela de álgebra (é necessário nomear este botão como  $k$ ) e também aparecerá na Janela de visualização. É necessário o nome para identificar os planos que irão interceptar a superfície.

Na Entrada, colocar o comando  $z = k$  e, assim, teremos os planos passando por cada nível, conforme visto na sessão 2.3.

Ao fazer os comandos solicitados acima descritos, já se terá uma ideia das curvas de níveis da função. Mas precisa-se enxergar no  $\mathbb{R}^2$  tais curvas, então, colocando novamente na ENTRADA o comando  $f(x, y) - k = 0$ , podemos verificar expressamente a curva sendo desenhada em cada nível, conforme a mudança do controle deslizante  $k$ .

Se ainda quiser visualizar a curva interseção no  $\mathbb{R}^3$ , basta acionar na ENTRADA a função InterseçãoGeométrica(<Plano>, <Quádrica>). E, desta forma, será possível visualizar a curva de nível na própria superfície.

Para facilitar o roteiro, acompanhe o passo a passo no Quadro 5, utilizando a função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , cuja superfície é o Parabolóide.

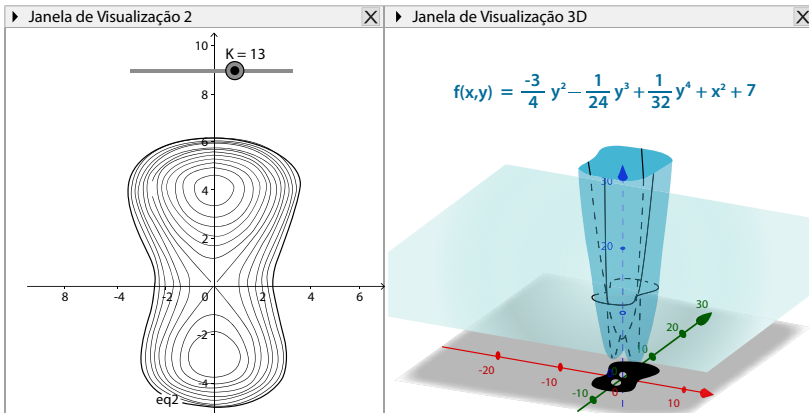
**Quadro 5.** Visualização das Curvas de Níveis

Passo	Descrição	Comando
11°	Plotar a Superfície em $\mathbb{R}^3$	$f(x, y) = x^2 + y^2$
22°	Criar um controle deslizante	$k$
33°	Criar os Planos Interceptadores	$z = k$
44°	Identificar as Curvas de Níveis	$f(x,y) - k = 0$
55°	Visualizar na superfície as Curvas	Interseção Geométrica (<Plano>, <Quádrica>)

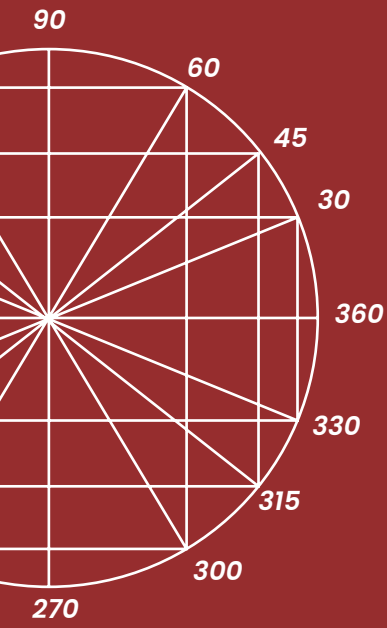
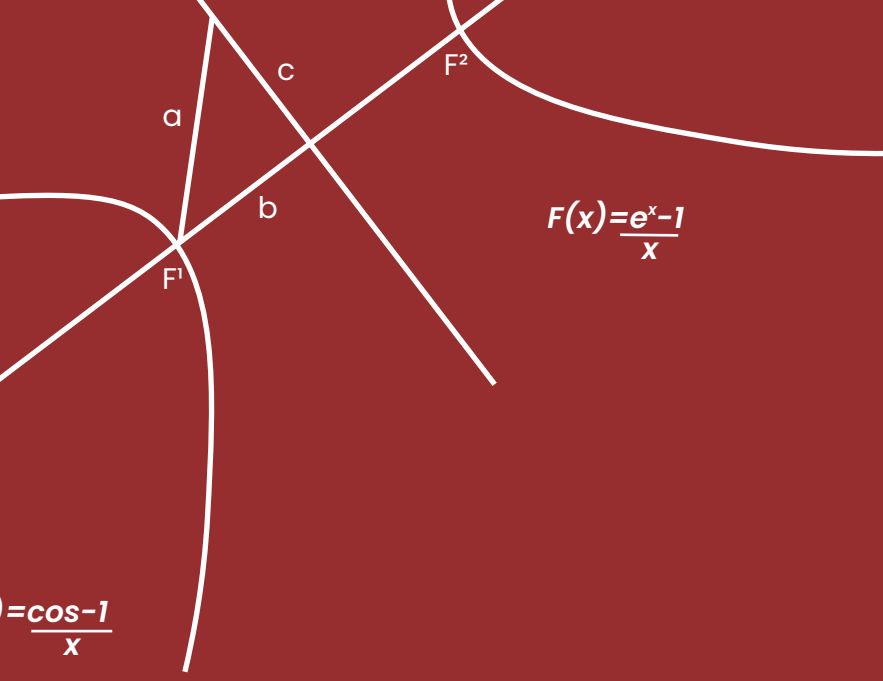
**Fonte:** Da autora

Em cada linha de comando, já mostrado no Quadro 5, é importante dar o **enter** para que as figuras sejam criadas no ambiente 3D. E no 5º Passo, é preciso utilizar exatamente a nomenclatura descrita na Janela de Álgebra. Após realizar os 5 passos, temos a Figura 24.

**Figura 24.** No software GeoGebra, à esquerda: Curvas de Níveis e à direita: Superfície

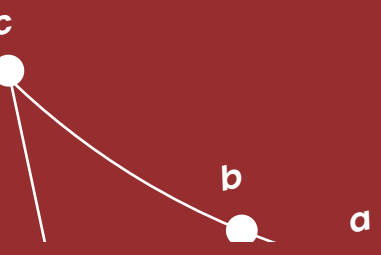


**Fonte:** App GeoGebra



# Cálculo diferencial de funções com duas variáveis

Capítulo 03



Neste capítulo, será possível estender os conceitos vistos em *Cálculo Diferencial para funções de uma variável*. Claramente com algumas diferenças topológicas, uma vez que estaremos atuando em conjuntos diferentes.

### 3.1. Limite de Funções com duas variáveis

Nesta seção, a análise do comportamento da função para a verificação da existência do limite da função demandará um pouco mais de cálculos uma vez que estaremos atuando dentro de uma bola, onde conforme o raio da bola diminui e se aproxima do ponto em questão, irá se analisar o comportamento do conjunto imagem desses elementos.

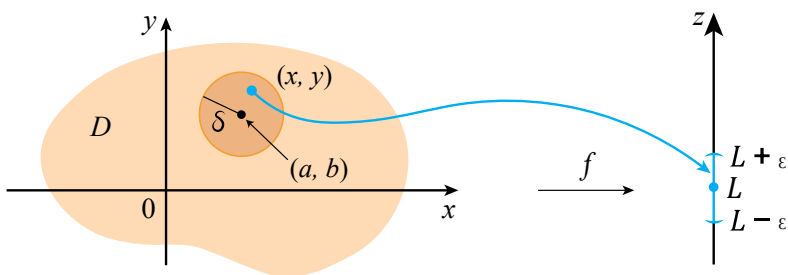
**Definição: [Limite de uma função com duas variáveis]** Seja  $f$  uma função com duas variáveis. Dizemos que a função  $f$  possui limite se, existir  $L \in \mathbb{R}$  tal que:

$$i) \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

$$ii) \text{ Dado } \epsilon \geq 0, \exists \delta \geq 0; 0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \forall (x,y) \in D(f) \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$

A assertiva ii) nos diz que todo elemento  $(x,y) \in B_\delta(a,b)$  para cada raio  $\delta$  se aproximando de  $(a,b)$  fará com que as imagens estejam convergindo para o limite  $L$  (Ver Figura 25).

**Figura 25.** Ilustração da bola tomada com centro em  $(a,b)$  e raio  $\delta$  e a análise das imagens



Fonte: Stewart, 2017

**Observação:** Para simular os elementos dentro da Bola com centro no ponto a ser analisado no limite, iremos construir uma tabela.

**Exemplo 18.** Determine, caso exista, o limite da função  $f(x, y) = \frac{3xy^2}{x^2 + y^2}$  quando  $(x, y)$  se aproxima da origem.

**Resolução:** A análise do comportamento da função dentro da bola de raio 1 e centro na origem  $(0,0)$  será realizada através da Tabela 1, com espaçamento de 0,2.

Perceba que, mesmo sem a função estar definida no ponto  $(0,0)$ , ainda assim podemos analisar o limite da função neste dado ponto.

Em qualquer caminho, seja horizontal, vertical, na diagonal ou em qualquer outro caminho que se aproxime do ponto em questão, existe uma sequência de forma decrescente convergindo para o que chamamos de limite da função. Neste caso, existe o limite e o seu valor é zero.

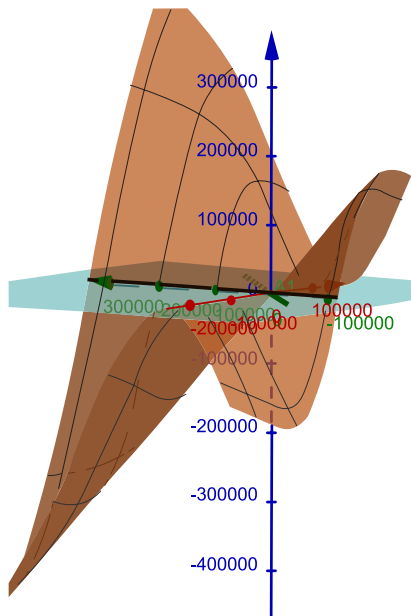
**Tabela 1:** Imagem por  $f$  dos pontos  $(x, y)$ , pertencentes à bola de raio 1 e centro na origem

$x \backslash y$	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
-1	-1.5	-1.17	-0.79	-0.41	-0.12	0	-0.12	-0.41	-0.79	-1.17	-1.5
-0.8	-1.46	-1.2	-0.86	-0.48	-0.14	0	-0.14	-0.48	-0.86	-1.2	-1.46
-0.6	-1.32	-1.15	-0.9	-0.55	-0.18	0	-0.18	-0.55	-0.9	-1.15	-1.32
-0.4	-1.03	-0.96	-0.83	-0.6	-0.24	0	-0.24	-0.6	-0.83	-0.96	-1.03
-0.2	-0.58	-0.56	-0.54	-0.48	-0.3	0	-0.3	-0.48	-0.54	-0.56	-0.58
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.58	0.56	0.54	0.48	0.3	0	0.3	0.48	0.54	0.56	0.58
0.4	1.03	0.96	0.83	0.6	0.24	0	0.24	0.6	0.83	0.96	1.03
0.6	1.32	1.15	0.9	0.55	0.18	0	0.18	0.55	0.9	1.15	1.32
0.8	1.46	1.2	0.86	0.48	0.14	0	0.14	0.48	0.86	1.2	1.46
1	1.5	1.17	0.79	0.41	0.12	0	0.12	0.41	0.79	1.17	1.5

**Fonte:** Da autora

Para exemplificar, o caminho do 1º quadrante na diagonal, constituído por converge para o valor 0, assim como os caminhos horizontais e verticais  $(0, \dots, 0)$ . Assim, tornando o limite existente e convergindo para o valor da convergência de todos os caminhos.

**Figura 26.** Gráfico da função  $f(x, y) = \frac{3xy^2}{x^2 + y^2}$



Fonte: App GeoGebra Calculadora 3D

Claramente, visualizando o gráfico da função  $f$  na Figura 26, conseguimos enxergar uma suavidade da função, mesmo que na origem exista um “buraco”, pelo fato da função não está definida neste ponto.

Em termos matemáticos,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^2}{x^2 + y^2} = 0$ .

**Exemplo 19.** Determine, caso exista, o limite da função  $g(x, y) = x^2 + 2y$  no ponto  $(0,0)$ .

**Resolução:** Diferente do exemplo anterior, a questão solicita o cálculo do limite de uma função que está definida no ponto. A análise, por meio da Tabela 2, ocorre de maneira análoga. Dentre todos os caminhos possíveis existe uma convergência ao se aproximar do ponto em questão,  $(0,0)$ . Dessa forma, o limite existe e seu valor é igual a 4.

Note que neste caso, a função não apresenta restrição e, portanto, contínua. Assim, o limite coincide com a imagem no ponto,  $g(0,0) = 0^2 + 2 * 0 = 0$

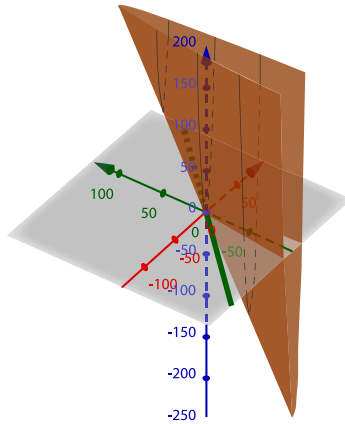
**Tabela 2.** Imagem por  $g$  dos pontos  $(x, y)$ , pertencentes à bola de raio 1 e centro na origem

$x \backslash y$	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
-1	-1	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1	1.4	1.8	2.2	2.6	3
-0.8	-1.36	-0.96	0.65	1.05	1.45	0.64	2.25	2.65	1.84	2.24	2.64
-0.6	-1.64	-1.24	1.49	1.89	2.29	0.36	3.09	3.49	1.56	1.96	2.36
-0.4	-1.84	-1.44	2.19	2.59	2.99	0.88	3.79	4.19	1.36	1.76	2.16
-0.2	-1.96	-1.56	2.64	3.04	3.44	0.04	4.24	4.64	1.24	1.64	2.04
0	-2	-1.6	2.8	3.2	3.6	0	4.4	4.8	1.2	1.6	2
0.2	-1.96	-1.56	2.64	3.04	3.44	0.04	4.24	4.64	1.24	1.64	2.04
0.4	-1.84	-1.44	2.19	2.59	2.99	0.16	3.79	4.19	1.36	1.76	2.16
0.6	-1.64	-1.24	1.49	1.89	2.29	0.36	3.09	3.49	1.56	1.96	2.36
0.8	-1.36	-0.96	0.65	1.05	1.45	0.64	2.25	2.65	1.84	2.24	2.64
1	-1	-0.6	-0.2	0.2	0.6	1	1.4	1.8	2.2	2.6	3

**Fonte:** Da autora

Na Figura 19, pode-se perceber que nas proximidades da origem existe uma suavidade da função, devido a sua continuidade. Assim o limite coincide com a imagem da função no ponto.

**Figura 27.** Gráfico da função  $g(x, y) = x^2 + 2y$



**Fonte:** App GeoGebra Calculadora 3D

Em termos matemáticos,  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 + 2y = 0^2 + 2 * 0 = 0$ .

**Exemplo 20.** Determine, caso exista, o limite da função  $h(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$  no ponto  $(0, 0)$ .

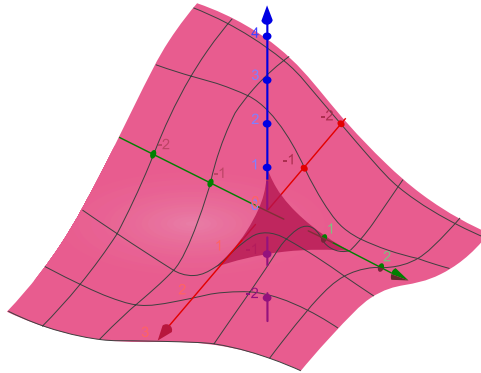
**Resolução:** Novamente, a análise do limite será em torno de um ponto não definido na função  $f$  em questão. Mas de qualquer maneira se pode determinar, caso exista o limite.

**Tabela 3.** Imagem por  $h$  dos pontos  $(x,y)$  pertencentes à bola de raio 1 e centro na origem

$x \backslash y$	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
-1	1	0.98	0.88	0.69	0.38	0	-0.38	-0.69	-0.88	-0.98	-1
-0.8	0.98	1	0.96	0.8	0.47	0	-0.47	-0.8	-0.96	-1	-0.98
-0.6	0.88	0.96	1	0.92	0.6	0	-0.6	-0.92	-1	-0.96	-0.88
-0.4	0.69	0.8	0.92	1	0.8	0	-0.8	-1	-0.92	-0.8	-0.69
-0.2	0.38	0.47	0.6	0.8	1	0	-1	-0.8	-0.6	-0.47	-0.38
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.2	-0.38	-0.47	-0.6	-0.8	-1	0	1	0.8	0.6	0.47	0.38
0.4	-0.69	-0.8	-0.92	-1	-0.8	0	0.8	1	0.92	0.8	0.69
0.6	-0.88	-0.96	-1	-0.92	-0.6	0	0.6	0.92	1	0.96	0.88
0.8	-0.98	-1	-0.96	-0.8	-0.47	0	0.47	0.8	0.96	1	0.98
1	-1	-0.98	-0.88	-0.69	-0.38	0	0.38	0.69	0.88	0.98	1

**Fonte:** Da autora

**Figura 28.** Gráfico da função  $h(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$



**Fonte:** App GeoGebra Calculadora 3D

Neste caso, perceba que os caminhos triviais como, por exemplo, em relação ao 1º quadrante, o caminho diagonal constituído dos elementos  $(-1, \dots, -1)$  converge para o valor. Já na horizontal e vertical, constituindo os elementos  $(0, \dots, 0)$  converge para o valor 0. Assim, não existe uma regularidade por caminhos, tornando inexistente o limite da função.

Apesar do gráfico (conforme a Figura 28) apresentar um gráfico com uma certa suavidade, existe um "achatamento" das "abas" da função presentes no quadrante ao se aproximar da origem, fazendo com que os caminhos, conforme Tabela 3, convirjam para valores diferentes.

Para simular esses caminhos de convergência vistos amplamente na análise da existência e cálculo do limite de funções com duas variáveis, temos o Teorema a seguir:

**Teorema: [Convergência por Caminhos]** Seja  $f$  uma função com duas variáveis. Considere dois caminhos quaisquer  $\gamma_1, \gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  suaves tais que:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f \circ \gamma_1(t) = L_1; \quad \gamma_1(t_0) = (a, b)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f \circ \gamma_2(t) = L_2; \quad \gamma_2(t_0) = (a, b)$$

com  $L_1 \neq L_2$ . Então não existe  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ .

**Observação:** O Teorema acima serve para dar a prova de que não existe o Limite de uma função com duas variáveis, uma vez que seria inviável exibir todos os caminhos e admitir que o limite da função existe.

Para se calcular o Limite de uma função com duas variáveis, temos ainda:

1) Uso de uma substituição a fim de transformar a função com uma variável, e utilizar as ferramentas vistas em Cálculo diferencial para funções com uma variável, como: Teorema de L'Hospital e "racionalização".

2) Propriedade de Limites estendido a funções com duas variáveis, quando temos a seguinte situação:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f \cdot g = 0$$

onde  $f$  é uma função limitada e  $g$  tende para zero na aproximação desejada.

3) Caso a função seja contínua, i.e, não apresente restrição no domínio desejado, pode-se calcular diretamente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

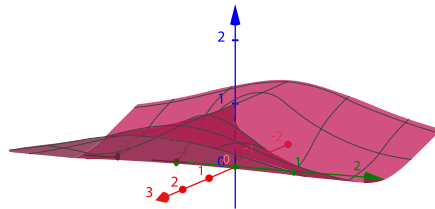
**Exemplo 21.** Calcule o limite da função  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$  no ponto  $(0, 0)$ .

**Resolução:** Note que  $x^2 + y^2 \geq x^2$  vale  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ . E assim,  $\frac{x^2 + y^2}{x^2} \geq 1$ . E portanto vale:

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

Então, a função  $f_1(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$  é limitada, como podemos verificar na Figura 29.

**Figura 29.** Gráfico da Função  $f_1(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$



Fonte: App GeoGebra Calculadora 3D

Logo, o cálculo do Limite prossegue por:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Uma vez que,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$$

e a função  $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$  é limitada.

**Definição: [Continuidade de funções com duas variáveis]** Dizemos que a função é contínua em um ponto  $(a, b) \in D(f)$ , se valerem:

1) Existir o  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ ;

2)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$ .

**Observação:** Se, para todo ponto do domínio da função acontecer 1) e 2), então  $f = f(x, y)$  diz-se contínua.

## 3.2. Derivadas Parciais & Derivadas Direcionais

**Definição: [Derivadas Parciais]** Sendo  $f$  uma função de duas variáveis, temos as seguintes derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \quad (18)$$

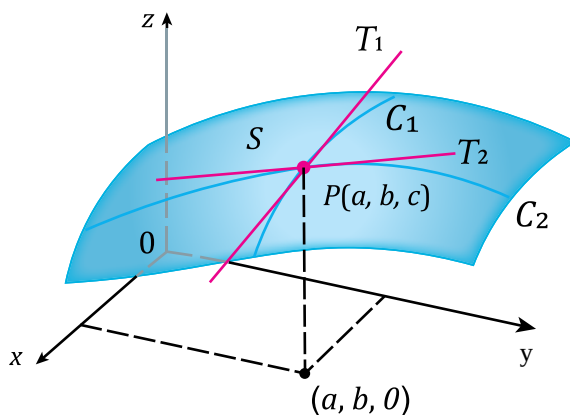
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \quad (19)$$

A equação (18) é chamada de Derivada Parcial "Total" em relação à variável  $x$  e, claramente, no quociente de Newton é feita a adaptação para a variação somente no eixo indexado.

A equação (19) é chamada de Derivada Parcial "Total" em relação à variável  $y$ , e analogamente, faz-se a adaptação para a variação somente no eixo indexado.

Nota-se que em ambas equações (18) e (19), existe uma fixação de um dos eixos, e isto gera uma reta no plano  $xOy$ . Associando os pontos da reta no plano à superfície  $(x_r, y_r, f(x_r, y_r))$ , gera-se uma curva (conforme a Figura 30) cujo coeficiente angular da reta tangente à essa curva é exatamente a derivada parcial em questão.

**Figura 30.** Interpretação geométrica das Derivadas Parciais



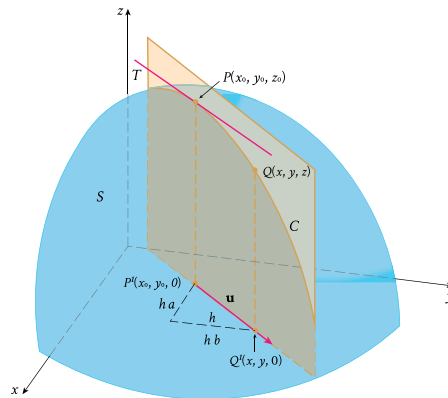
Fonte: Stewart, 2017

Na Figura 30, as curvas  $C_1$  e  $C_2$  são geradas a partir da associação dos pontos sobre a reta no plano  $xOy$ , uma fixando a variável  $y$  e a outra a variável  $x$ .  $T_1$  e  $T_2$ , as retas tangentes às curvas, respectivamente.  $S$  a superfície gerada pelo gráfico de  $f$ .

**Definição: [Função Diferenciável]** Seja  $f = f(x, y)$ . Diz-se que  $f$  é diferenciável, se as derivadas parciais, definidas nas equações (18) e (19), existirem e forem contínuas.

**Definição: [Derivada Direcional]** A derivada direcional de uma função se dá por meio de um vetor normalizado no plano  $xOy$ , cujo vetor será o vetor diretor de uma reta construída no plano. Restringindo-se aos pontos do plano, terá uma curva contida na superfície (gráfico de  $f$ ). Assim, o coeficiente angular da reta tangente à Curva é a derivada direcional.

**Figura 31.** Esquema gráfico da derivada de uma função na direção de um vetor  $u$



**Fonte:** Stewart, 2017

Conforme a Figura 31, uma tentativa de conseguir o vetor tangente é projetando os pontos  $P$  e  $Q$ , que estão sobre a curva, no plano. Assim os pontos projeções são  $P'$  e  $Q'$ , e temos que  $u = (a, b)$  e  $\overline{P'Q'}$  são paralelos.

Tendo-se, assim, que  $x - x_0 = ha$  e  $y - y_0 = hb$ , onde substituindo  $x$  e  $y$  no quociente de Newton e tomando o limite quando  $h$  tende a zero, obtemos a derivada direcional dada por:

$$D_u f = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h} \quad (20)$$

**Observação:** As derivadas parciais são casos particulares de derivadas direcionais. No caso, a derivada parcial de  $f$  em relação à  $x$  é uma derivada na direção do eixo  $x$ , ou seja, do versor  $i$ . Analogamente, a derivada parcial de  $f$  em relação à  $y$  é uma derivada na direção do versor  $j$ .

**Exemplo 22.** Calcule, pela definição, a derivada direcional da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  na direção do vetor  $u = (-1, 1)$  no ponto  $(-2, 3)$ .

**Resolução:** De acordo com a definição de Derivada Direcional, temos que verificar alguns itens importantes:

1) Normalizar o vetor  $u$

Sabendo que a norma de  $u$  é  $\sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , o vetor unitário será  $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

2) Substituição da função e vetor na equação (20):

$$\begin{aligned}
D_u f &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(-2 - \frac{h}{\sqrt{2}}, 3 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(-2, 3)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(-2 - \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(3 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2 - ((-2)^2 + 3^2)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2)^2 + \frac{4h}{\sqrt{2}} + \frac{h^2}{2} + 9^2 + \frac{6h}{\sqrt{2}} + \frac{h^2}{2} - (-2)^2 - 3^2}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\left(\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{2h}{2} + \frac{6}{\sqrt{2}}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10}{\sqrt{2}} + \frac{2h}{2} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}
\end{aligned}$$

**Definição: [Vetor Gradiente]** O vetor gradiente é definido pelas derivadas parciais da função e obtido por:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

**Observações:** A taxa de variação máxima de uma função em relação ao vetor, é exatamente na direção do vetor gradiente da função.

**Teorema: [Derivada Direcional]** Seja  $f = f(x, y)$  diferenciável, então  $f$  tem derivada direcional na direção de qualquer vetor unitário  $u = (a, b)$  definido por:

$$D_u f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot u \quad (21)$$

**Demonstração:** Admita uma função auxiliar de uma variável definida como uma composição dada por:

$$g(h) = f(x_0 + ah, y_0 + bh) \quad (22)$$

Ao se calcular a derivada de  $g$ , obtemos:

$$g'(h) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot b$$

Por outro lado, por definição,  $g'(0) = D_u f$

$$\text{Assim, } D_u f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot b = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u$$

**Exemplo 23.** Calcule a derivada direcional da função dada no Exercício 22.

**Resolução:** Calculando o vetor gradiente da função:

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

**Aplicando no ponto  $(-3, 2)$ :**

$$\nabla f(-3, 2) = (-6, 4)$$

Fazendo o produto interno, conforme equação (21), obtemos:

$$D_u f(-3, 2) = \nabla f(-3, 2) \cdot u = (-6, 4) \cdot \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

**Observação: [Taxa Máxima de Variação da Derivada Direcional]** Da equação (20), onde se associa a taxa de variação com um produto interno, sabemos que vale a Equação que possibilita calcular ângulos entre vetores,  $u \cdot v = |u||v|\cos\theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre os vetores  $u$  e  $v$ .

Assim,  $D_u f = \nabla f \cdot u = |\nabla f||u|\cos\theta$ . Logo, o valor máximo da derivada direcional é quando  $\cos\theta = 1$  e, isto implica que  $\theta = 0$ , acarretando que  $\nabla f$  e  $u$  estão na mesma direção.

### 3.3. Plano Tangente a uma Superfície

Para determinar o plano tangente, usa-se ferramentas de Álgebra Linear para a determinação de um plano.

**Definição: [Plano Tangente]** Dada uma função diferenciável  $f(x, y)$ , dizemos que o plano tangente à superfície é dado por:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (23)$$

**Demonstração:** Suponha que  $(A, B, C)$  seja o vetor normal e  $(x_0, y_0, z_0)$  um ponto interseção da superfície e do plano tangente. Das considerações feitas acima, temos que  $z_0 = f(x_0, y_0)$  e da equação do plano, vale:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (24)$$

Admitindo  $C \neq 0$ , dividimos a equação (24) por  $C$ .

$$z - z_0 = -\frac{A}{C}(x - x_0) - \frac{B}{C}(y - y_0) \quad (25)$$

Fazendo  $x = x_0$  na equação (25), obtemos uma curva no plano  $yOz$ , cujo coeficiente angular é exatamente a derivada parcial de  $f$  em relação à  $y$ . E analogamente, quando faz-se  $y = y_0$ .

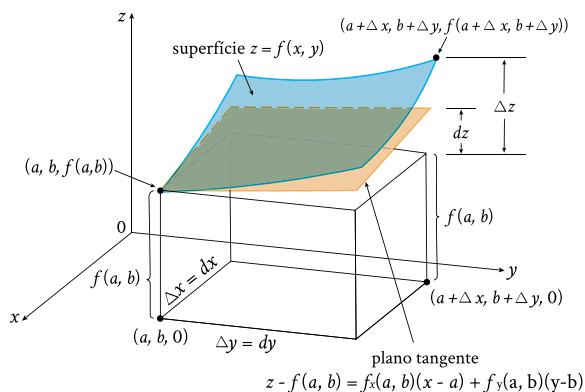
**Definição: [Linearização]** Através da equação do plano tangente definimos a Linearização ou aproximação linear da função dada por:

$$L(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \quad (26)$$

**Definição: [Diferencial]** A partir das diferenciais nos eixos  $x$  e  $y$ , identificados por,  $dx$  e  $dy$ , respectivamente. Temos a diferencial total da função  $z = f(x, y)$  diferenciável definida por:

$$dz = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \quad (27)$$

**Figura 32.** Esquema geométrico da Superfície e seus planos



**Fonte:** Stewart, 2017

A Figura 32 mostra a diferença entre variação  $\Delta z$  (Diferença que vai da superfície ao prisma  $\Delta x \Delta y \Delta z$ ) e  $dz$  (Diferença que vai do plano tangente ao prisma  $\Delta x \Delta y \Delta z$ ).

**Exemplo 24.** Em uma máquina de cortes industriais para confecção de caixas de papelão (conforme Figura 33), as dimensões da caixa são: 75 cm, 60 cm e 40 cm e foi verificado um erro de aferição do equipamento de 0,001 no eixo  $x$ , de 0,002 no eixo  $y$  e 0,001 no eixo  $z$ . Dessa forma, qual o erro total para o volume de tal caixa.

**Figura 33.** Máquina de corte industrial para confecção de caixas



**Fonte:** Apolo Sistemas Gráficos<sup>2</sup>

O volume da caixa é  $V = x.y.z$ , calculando as derivadas parciais e substituindo os erros milimétricos, encontramos:

<sup>2</sup> Disponível em: <https://images.app.goo.gl/NG7KSvG2rEVmyNmU6>

$$dV = yz dx + xz dy + xy dz = 60.40.(0,001) + 75.40.(0,002) + 75.60.(0,001) = 2,4 + 6 + 4,5 = 12,9$$

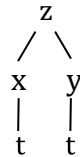
Logo, a perda da capacidade será de 12,9 cm<sup>3</sup>, representando um pouco mais de 0,07% de perda.

### 3.4. Regra da Cadeia

Assim como em Cálculo Diferencial para funções com uma variável, temos a Regra da Cadeia para derivar funções com duas variáveis, onde as variáveis podem ser funções que dependem de uma ou mais variáveis, constituindo-se assim uma ferramenta para derivar funções compostas e suas aplicações.

Como uma função composta, pode-se substituir as variáveis na função e torná-la uma expressão em termos das variáveis internas e fazer a derivação, mas aqui irá se fazer uso das árvores.

**Definição: [Regra da Cadeia - 1º Caso]** Seja  $z = f(x,y)$  uma função diferenciável, onde cada uma das suas variáveis são dadas por:  $x = x(t)$  e  $y = t(t)$ . Então, a derivada  $\frac{dz}{dt}$  será construída através da árvore:



Logo, como a árvore termina na mesma variável, tem-se que, ao final da composição, a função  $z$  será  $z = z(t)$  e seu cálculo será via:

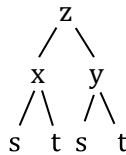
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \quad (28)$$

Importante sempre destacar na equação (28), o ponto de atuação das respectivas derivadas. Sempre levando em consideração que, as derivadas sempre atuam nas mesmas variáveis da função. Logo, a equação (28), em termos de seus pontos:

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_t = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x,y)} \cdot \left. \frac{dx}{dt} \right|_t + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x,y)} \cdot \left. \frac{dy}{dt} \right|_t \quad (29)$$

onde  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ .

**Definição: [Regra da Cadeia - 2º Caso]** Seja  $z = f(x, y)$  uma função diferenciável, onde as variáveis  $x = x(s, t)$  e  $y = y(s, t)$  também são funções com duas variáveis diferenciáveis. Logo, a derivada da função composta será dada em termos de  $z = z(s, t)$ , como mostra a árvore a seguir:



Portanto, as derivadas parciais de  $z$  em relação às variáveis  $s$  e  $t$  são:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ou ainda, na atuação das derivadas em seus respectivos pontos:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial s} \right|_{(s,t)} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x,y)} \cdot \left. \frac{\partial x}{\partial s} \right|_{(s,t)} + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x,y)} \cdot \left. \frac{\partial y}{\partial s} \right|_{(s,t)}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{(s,t)} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x,y)} \cdot \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{(s,t)} + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x,y)} \cdot \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(s,t)}$$

onde  $x = x(s, t)$  e  $y = y(s, t)$ .

Esse procedimento pode ser estendido ao número de variáveis, tanto da função como das variáveis (como sendo funções de várias variáveis).

Em geral, como aplicações, temos vários exemplos associando experimentos físicos, uma vez que as variáveis em questão dependem do tempo. Ou mesmo a problemas envolvendo taxas de variação.

**Exemplo 25.** Suponha que  $f$  seja diferenciável de  $x$  e  $y$  e que  $g(u, v) = f(e^{uv} - \operatorname{sen} v, v \cdot \ln u - \cos(uv))$ .

**Tabela 5.** Valores das Imagens nos referidos pontos

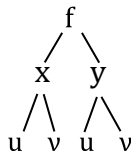
	$f$	$g$	$f_x$	$f_y$
$(0,0)$	1	-3	-2	7
$(1,-1)$	5	6	4	-1
$(0,1)$	9	0	3	2

**Fonte:** Da autora

Usando a tabela 5, qual o valor de  $g_v(1,0)$ ?

**Resolução:** A ideia da resolução é utilizar a árvore para explicitar a derivada solicitada e atentar principalmente para o ponto de atuação da derivada solicitada  $g_u(1,0)$ .

Note que tanto faz usar o nome de  $f$  ou de  $g$ , pois existe uma igualdade.



Temos que a composta será  $f = f(u, v)$  e, portanto, podemos ter duas derivadas parciais.

Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \quad (30)$$

onde  $x = e^{uv} - \operatorname{sen} v$  e  $v = v \cdot \ln u - \cos(uv)$ .

Logo, quando  $(u, v) = (1, 0)$  então  $(x, y) = (e^{1 \cdot 0} - \text{sen} 0, 0 \cdot \ln 1 - \cos(1 \cdot 0)) = (1, -1)$ .

Calculando as derivadas  $\frac{\partial x}{\partial v}$  e  $\frac{\partial y}{\partial v}$ , obtemos:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) = v e^{uv} \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{v}{u} + v \cdot \text{sen}(uv) \end{cases}$$

Assim, substituindo os valores das derivadas nos pontos solicitados na equação (30):

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(1, 0) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, -1) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(1, 0)$$

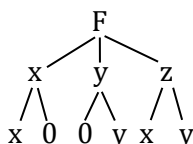
$$\frac{\partial f}{\partial u}(1, 0) = 4 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = 0$$

### 3.5. Derivação Implícita

Existem duas maneiras de calcular as derivadas parciais de uma função dada implicitamente, mas neste caso dar-se-á preferência do cálculo utilizando a árvore.

**Definição: [Derivação Implícita]** Seja  $z = (x, y)$  diferenciável dada implicitamente por uma equação  $F(x, y, z) = 0$ . Nessas condições, podemos utilizar a árvore (procedimento visto para a Regra da Cadeia aplicada a funções com duas variáveis) para determinar as derivadas parciais de  $z$  em relação às suas variáveis.

No caso abaixo, examinaremos a derivada de  $f$  em relação à variável  $x$ :



Assim, a função composta  $F$  depende das variáveis  $x$  e  $y$ , tendo-se, dessa forma, o cálculo de duas derivadas parciais.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \quad (31)$$

Na equação (29), temos, por hipótese:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ \cancel{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \cancel{\frac{dx}{dx}} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \cancel{\frac{dy}{dx}} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \end{array}$$

E, assim, a derivada em relação à variável  $x$  da função implícita  $z$  é:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (32)$$

Analogamente,

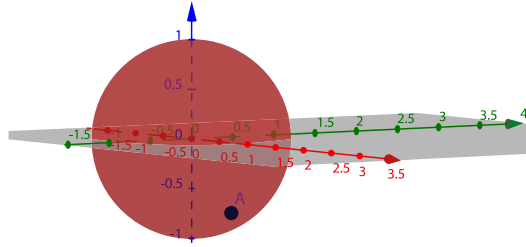
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad (33)$$

As equações (32) e (33) são as derivadas da função dada implicitamente.

$$z = f(x, y)$$

**Exemplo 26.** Determine o plano tangente à esfera dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  no ponto  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

**Figura 34.** Imagem da Esfera de raio 1 e o ponto especificado no problema



**Fonte:** App Geogebra Calculadora 3D

**Resolução:** Para se determinar o plano tangente, precisamos das derivadas parciais de  $z = f(x, y)$ . E, neste caso, usaremos a derivação implícita para determinar tais derivadas.

Para isso, deve-se fazer  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$  e de acordo com as equações (32) e (33), obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{2y}{2z} = -\frac{y}{z} \end{cases}$$

Nos pontos solicitados:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = -\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{0}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0 \end{cases}$$

Logo, a equação do plano tangente à esfera no ponto  $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  é:

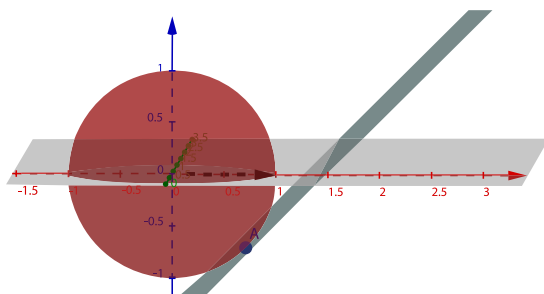
$$z - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 0 \cdot (y - 0)$$

Ou, melhor ainda:

O plano tangente pode ser visto na Figura 28 e é dado por:

$$-x + z = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$

**Figura 35.** Figura contendo a esfera de raio 1 e o plano tangente à esfera em A



Fonte: App GeoGebra Calculadora 3D

## 3.6. Taxa de Variação

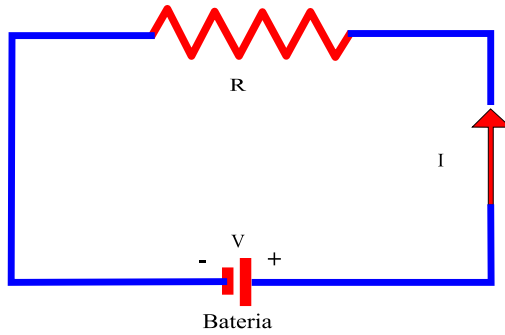
**Definição: [Taxa de Variação]** A taxa de variação, uma medida muito utilizada na Física, por exemplo, para a medida da velocidade ou da aceleração. Representada na forma de um quociente entre diferenças, que podem ser de natureza diferentes. Os problemas podem ser os mais variados possíveis, sendo ela muito útil na área da Engenharia.

**Exemplo 27.** A velocidade é uma taxa de variação dada por:  $v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , onde  $\Delta x = x - x_0$  e  $\Delta t = t - t_0$ .

No exemplo seguinte, temos várias taxas de variações envolvidas, e que será utilizado a Regra da Cadeia para exprimir o que se pede.

**Exemplo 28.** A voltagem  $V$ , em um circuito elétrico simples (conforme Figura 36) está decrescendo devagar à medida que a bateria se descarrega. A resistência está aumentando devagar com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm,  $V = I \cdot R$ , para achar como a corrente  $I$  está variando no momento em que  $R = 400\Omega$ ,  $I = 0,08 \text{ A}$ ,  $\frac{dV}{dt} = -0,01 \text{ V/s}$  e  $\frac{dR}{dt} = 0,03 \Omega/s$ .

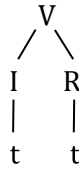
Figura 36. Circuito em Série



Fonte: e-Banco de Exercícios<sup>3</sup>

**Resolução:** É sempre importante destacar a árvore, destacando as dependências de cada função em relação à(s) sua(s) variável(is).

Neste caso, temos:



Pela Regra da Cadeia - Caso 1, temos que a derivada da tensão em relação ao tempo  $t$  é:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_t = \left. \frac{\partial V}{\partial I} \right|_{(I,R)} \cdot \left. \frac{dI}{dt} \right|_t + \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{(I,R)} \cdot \left. \frac{dR}{dt} \right|_t \quad (34)$$

Perceba que o exercício pede  $\left. \frac{dI}{dt} \right|_t$  no instante em que  $(I, R) = (0,08; 400)$  e já é conhecido as taxas de variação da Tensão e da Resistência em relação ao tempo. E notando que as derivadas parciais de  $V$  em relação às variáveis  $I$  e  $R$  são:

$$\frac{\partial V}{\partial I}(I, R) = R \quad \text{e} \quad \frac{\partial V}{\partial R}(I, R) = I$$

<sup>3</sup> Disponível em: [https://mat.unb.br/grad/aulas/cadernos\\_calculo/calculo3/b\\_e/exibe\\_exercicio.php?id=215](https://mat.unb.br/grad/aulas/cadernos_calculo/calculo3/b_e/exibe_exercicio.php?id=215)

Substituindo as informações dadas, na equação (34):

$$-0,01 = 400 \cdot \frac{dl}{dt} + 0,08 \cdot 0,03$$

Logo,  $\frac{dl}{dt} = -0,000031 \text{ A/s}$ .

### 3.7. Visualização das Derivadas Parciais no GeoGebra

Para entender a interpretação geométrica da Derivada Parcial de uma função com duas variáveis, deve-se ter o conceito bem arquitetado. Seguindo os passos na Tabela a seguir, constrói-se:

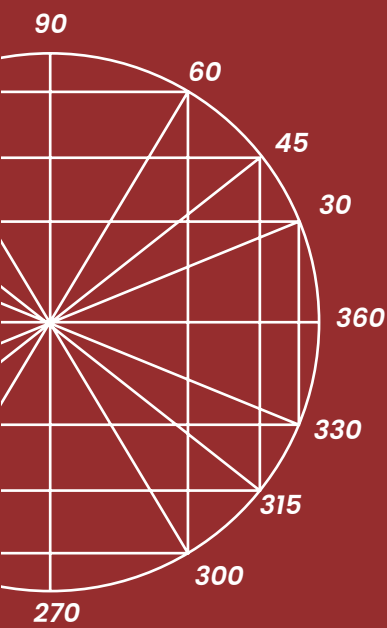
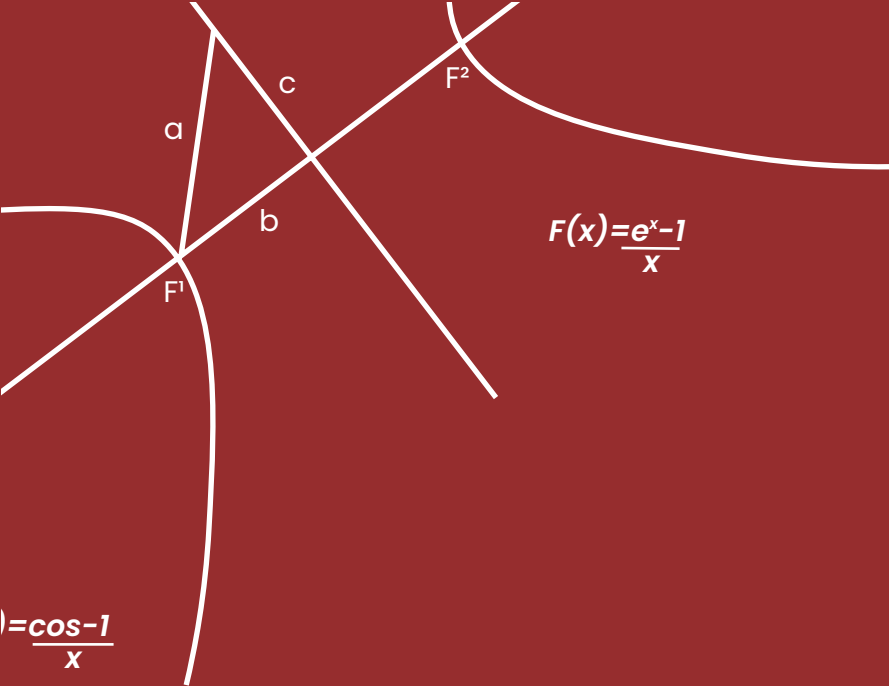
No GeoGebra 3D:

**Tabela 6.** Passos para a construção da Derivada Parcial

Passos	Descrição	Comando
1)	Criar uma função com duas variáveis	$f(x, y)$
2)	Criar dois controles deslizantes	Controles deslizantes: a e b
3)	Criar um ponto genérico	$P = (a, b, f(a, b))$
4)	Criar um plano sobre um dos eixos, por exemplo, sobre o eixo dos x	$x = a$
5)	Identificar a curva interseção do plano "x = a" com a superfície "f"	Interseção (<Objeto>, <Objeto>)
6)	Calculando a derivada parcial de f em relação à y	$f_y(x, y)$ =Derivada (<Função>, <Variável>)
7)	Derivada no ponto (a, b)	$m = f_y(a, b)$
8)	Fazer o vetor tangente à curva no plano y0z, mostrado na origem	$v = (0, 1, m)$
9)	Criar uma reta paralela ao vetor tangente "v" no ponto "P" sobre a curva interseção	Reta(<Ponto>, <Vetor Diretor>)

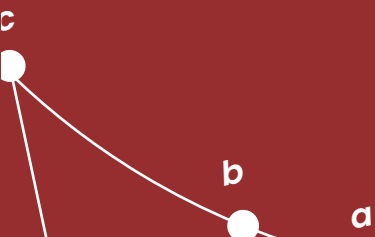
Fonte: Da autora

Executando os passos contidos na Tabela 6, pode-se visualizar a representação do coeficiente angular da curva interseção da superfície (gráfico da função com duas variáveis) e o plano (fazendo a variação em apenas um eixo e fixando o outro), conforme a Figura 30.



# Estudo Diferencial

Capítulo 04



Neste capítulo, o estudo diferencial permite que possamos entender o comportamento da função com duas variáveis, utilizando o estudo de limites e derivadas. Destaca-se os pontos de máximo e mínimos, muito utilizados nos problemas de otimização.

## 4.1. Pontos Críticos

**Definição: [Pontos Críticos]** Dada uma função  $z = f(x, y)$  diferenciável. Dizemos que o ponto  $(x_0, y_0)$  é um ponto crítico de  $f$  se acontecer, simultaneamente:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Intuitivamente, nos pontos críticos o plano tangente neste ponto é paralelo ao plano  $xOy$ .

**Definição: [Valores Críticos]** Encontrados os pontos críticos  $(x_i, y_i)$  de uma função  $f = f(x, y)$ , então  $f(x_i, y_i)$  serão chamados de Valores Críticos de  $f$ .

**Exemplo 29.** Determine o(s) ponto(s) crítico(s) da função  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 6xy$

**Resolução:** As derivadas parciais de  $f$  são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 - 6y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4y^3 - 6x \end{cases}$$

Assim, para encontrar o(s) ponto(s) crítico(s) da função, igualamos as derivadas parciais a zero e temos o sistema:

$$\begin{cases} 4x^3 - 6y = 0 & (33) \\ 4y^3 - 6x = 0 & (34) \end{cases}$$

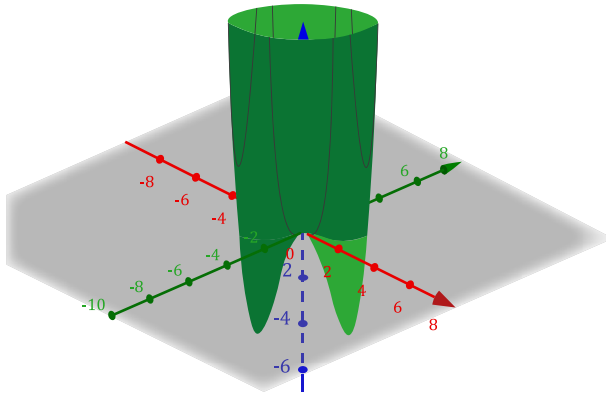
Isolando  $y$  na equação (30) e substituindo na equação 31, chega-se a uma equação na variável  $x$ :

$$4\left(\frac{2}{3}x^3\right)^3 - 6x = 0 \rightarrow 2x\left(\frac{16}{27}x^8 - 3\right) = 0$$

A qual resulta em  $x = 0$  ou  $x = \pm \sqrt[8]{\frac{3^4}{2^4}}$ . Tendo-se, assim, 3 pontos críticos da função:  $p_1(0,0)$ ,  $p_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$  e  $p_3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

Na Figura 37, pode-se visualizar os pontos críticos achados acima.

**Figura 37.** Gráfico da função  $f(x,y) = x^4 + y^4 - 6xy$



Fonte: App Geogebra Calculadora 3D

## 4.2. Classificação dos Pontos Críticos via Hessiano da função

Após encontrar todos os pontos críticos da função, é necessário analisar ao redor de tal ponto, o comportamento das imagens. Topologicamente, é necessário uma Bola,  $B_\delta(x_0, y_0)$ , de centro no ponto crítico  $(x_0, y_0)$  e de raio  $\delta$ , com  $\delta$  suficiente grande e positivo e determinar a imagem de cada um dos pontos dentro de tal Bola, tal como havia sido feito para a análise e cálculo do Limite.

Mas uma maneira mais prática é avaliar o Hessiano da função e, de acordo com a análise proposta, classificar o ponto como: Ponto de Máximo, Ponto de Mínimo ou Ponto de Sela.

**Definição: [Hessiana de uma função]** Dada uma função  $z = f(x, y)$  diferenciável. A matriz hessiana da função  $f$  é uma matriz de ordem 2, cujas linhas são formadas pelas derivadas de 2ª ordem da função  $f$ .

Notação:  $(f)$  ou  $\nabla^2(f)$ .

$$Hess(f(x, y)) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix} \quad (35)$$

**Observação:** Refere-se o nome Hessiana à Matriz dada por (35). Ao calcular o determinante, dizemos Hessiano.

**Definição: [Classificação dos Pontos Críticos]** A classificação de um ponto crítico  $(x_0, y_0)$  da função  $z = f(x, y)$  será dado por meio da aplicação da  $Hess(f(x_0, y_0))$  e o cálculo do Hessiano.

I) Se  $|Hess(f(x_0, y_0))| > 0$ , temos:

i)  $(x_0, y_0)$  um Ponto de Máximo, se  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ;

ii)  $(x_0, y_0)$  um Ponto de Mínimo, se  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ;

II) Se  $|Hess(f(x_0, y_0))| < 0$ , temos  $(x_0, y_0)$  ponto de Sela.

III) Se  $|Hess(f(x_0, y_0))| = 0$ , terá que avaliar em torno do ponto com a análise pontual.

O exemplo a seguir levará em conta a análise das imagens providas da bola com centro no ponto de análise e raio positivo, para a verificação da situação do ponto crítico em questão.

**Exemplo 30.** Determine os valores críticos da função  $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$

**Resolução:** Determinando os pontos críticos existentes da função  $f$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3x \end{cases}$$

Igualando as derivadas parciais a zero, temos o sistema:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 & (36) \\ 3y^2 - 3x = 0 & (37) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (36) por  $x$  e a equação (37) por  $y$ , teremos uma igualdade,  $3x^3 = 3y^3$ , o que resulta em  $x = y$ . Onde, substituindo em qualquer uma das equações do sistema obtemos:  $3x^2 - 3x = 0$ , ou seja,  $x = 0$  ou  $x = 1$ . Logo, temos dois pontos críticos:  $p_1(0,0)$  e  $p_2(1,1)$ .

Para a classificação dos pontos críticos achados, temos que fazer a matriz Hessiana, fazendo as derivadas de 2ª ordem.

$$Hess(f(x, y)) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

Analisando o ponto  $p_1$ , temos:  $Hess(f(0,0)) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ , no qual o Hessiano é  $-9 < 0$ , indicando que o ponto  $p_1$  é ponto de sela.

Analisando o ponto  $p_2$ , temos:  $Hessf(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$  no qual o Hessiano é  $27 > 0$ , e  $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$ , indicando que o ponto  $p_2$  é ponto de mínimo.

Uma outra maneira de analisar os pontos críticos seria analisar pontualmente: por exemplo, a análise do ponto  $p_1$ : Centrando uma Bola em  $p_1$  de raio 1, com espaçamento de 0,2 (conforme a Tabela 7).

**Tabela 7.** Imagem dos pontos contidos na Bola centrada em  $p_1$  e raio 1

y \ x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
-1	-1	0.09	0.98	1.74	2.39	3	3.61	4.26	5.02	5.91	7
-0.8	0.09	1.06	1.83	2.46	3	3.49	3.98	4.51	5.14	5.92	6.89
-0.6	0.98	1.83	2.49	3	3.42	3.78	4.15	4.57	5.08	5.74	6.58
-0.4	1.74	2.46	3	3.39	3.69	3.94	4.18	4.48	4.87	5.41	6.14
-0.2	2.39	3	3.42	3.69	3.86	3.99	4.12	4.3	4.57	4.98	5.59
0	3	3.49	3.78	3.94	3.99	4	4.01	4.06	4.22	4.51	5
0.2	3.61	3.98	4.15	4.18	4.12	4.01	3.9	3.83	3.86	4.04	4.41
0.4	4.26	4.51	4.57	4.48	4.3	4.06	3.83	3.65	3.56	3.62	3.86
0.6	5.02	5.14	5.08	4.87	4.57	4.22	3.86	3.56	3.35	3.29	3.42
0.8	5.91	5.92	5.74	5.41	4.98	4.51	4.04	3.62	3.29	3.1	3.11
1	7	6.89	6.58	6.14	5.59	5	4.41	3.86	3.42	3.11	3

**Fonte:** Da autora

Se pensar em caminhos, por exemplo, caminho horizontal  $\gamma_1 = (t, 0)$  e aplicando o método diferencial para função com uma variável, ter-se-ia que a função é tanto crescente para a esquerda quanto para a direita da origem, onde o ponto é de Sela. Perceba que vários caminhos convergindo para a origem têm esse mesmo comportamento.

De maneira análoga, se fosse feito a análise em torno do ponto  $p_2$  (conforme a Tabela 8).

**Tabela 8.** Imagem dos pontos contidos na Bola centrada em  $p_2$  e raio 1

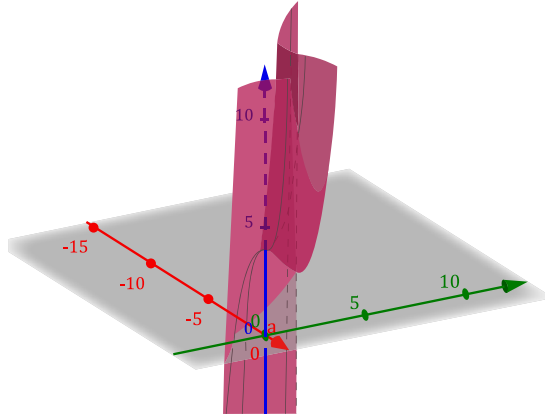
y \ x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
0	4	4.01	4.06	4.22	4.51	5	5.73	6.74	8.1	9.83	12
0.2	4.01	3.9	3.83	3.86	4.04	4.41	5.02	5.91	7.14	8.76	10.81
0.4	4.06	3.83	3.65	3.56	3.62	3.86	4.35	5.13	6.24	7.74	9.66
0.6	4.22	3.86	3.56	3.35	3.29	3.42	3.78	4.44	5.43	6.81	8.62
0.8	4.51	4.04	3.62	3.29	3.1	3.11	3.36	3.9	4.77	6.02	7.71
1	5	4.41	3.86	3.42	3.11	3	3.13	3.54	4.3	5.43	7
1.2	5.73	5.02	4.35	3.78	3.36	3.13	3.14	3.43	4.06	5.08	6.53
1.4	6.74	5.91	5.13	4.44	3.9	3.54	3.43	3.61	4.12	5.02	6.34
1.6	8.1	7.14	6.24	5.43	4.77	4.3	4.06	4.12	4.51	5.29	6.5
1.8	9.83	8.76	7.74	6.81	6.02	5.43	5.08	5.02	5.29	5.94	7.03
2	12	10.81	9.66	8.62	7.71	7	6.53	6.34	6.5	7.03	8

**Fonte:** Da autora

Novamente, pensando nos caminhos triviais, percebe-se claramente que, por exemplo,  $\gamma_1 = (t, 0)$  temos que, à esquerda da imagem no ponto  $p_2$ , as imagens decrescem enquanto que, à direita, as imagens crescem, indicando que temos um ponto de mínimo local.

Na Figura 38, temos o gráfico da função em questão e, exibindo os dois pontos críticos achados claramente, temos uma sela na origem e um ponto de mínimo no ponto (1,1), cujos valores de sela e de mínimo são 4 e 3, respectivamente.

**Figura 38** Gráfico da função  $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



Fonte: App GeoGebra Calculadora 3D

### 4.3. Problemas de Otimização

Os problemas de Otimização são as aplicações envolvendo várias áreas de exatas e, em particular, problemas relacionados à maximização/minimização de um determinado problema. Assim, muito contextualizados no meio de indústrias e Engenharias de modo geral, os problemas se concentram numa função da qual queremos extrair o ponto de máximo/mínimo atendendo a certas restrições.

**Definição: [Problemas de Otimização]** Dado um problema envolvendo maximização/minimização, temos que obter: função objetivo (geralmente envolvendo 3 variáveis) e uma restrição (envolvendo as mesmas variáveis da função), na qual se pretende determinar uma função com apenas duas variáveis e aplicar o método diferencial para examinar os pontos críticos da função e exibir o ponto ótimo da função que atenda às determinações de tal problema.

Em atenção, devemos extrair do problema:

**Figura 39.** Esquema para identificação em Problemas de Otimização



**Fonte:** Da autora

A restrição faz com que, isolando uma das variáveis e a substituindo na Função, possa transformar a função com apenas duas variáveis. E, assim, aplicar o método de diferenciação para encontrar o ponto ótimo requerido.

**Exemplo 31.** Um pacote com o formato de uma caixa retangular pode ser enviado pelo correio como encomenda postal se a soma de seu comprimento e cintura (perímetro da seção ortogonal ao comprimento) for de, no máximo, 108 pol. Determine as dimensões do pacote de maior volume que pode ser enviado como encomenda postal.

**Resolução:** Temos que a função objetivo no problema é o volume, da qual queremos obter o ponto de máximo. E a restrição é dada pela soma do seu comprimento ( $x$ ) e da cintura ( $2y + 2z$ ).

$$V(x, y, z) = xyz \quad (36)$$

$$R(x, y, z) = x + (2y + 2z) = 108 \quad (37)$$

Isolando a variável  $x$  (34) e substituindo na equação (33), obtemos a função Volume em função das variáveis  $y$  e  $z$ .

$$V(y, z) = (108 - 2y - 2z)yz$$

Para calcular o ponto crítico da função  $V$ , calculam-se as derivadas parciais:

$$\begin{cases} V_y(y, z) = -2yz + (108 - 2y - 2z)z \\ V_z(y, z) = -2yz + (108 - 2y - 2z)y \end{cases}$$

Logo, resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} z(-4y - 2z + 108) = 0 \\ y(-4z - 2y + 108) = 0 \end{cases}$$

Desprezando  $y = z = 0$ , obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 4y + 2z = 108 \\ 2y + 4z = 108 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema por 2 e subtraindo da outra, temos:

$$6y = 108.$$

O que resulta em  $y = 18$ .

$$\text{E assim, } z = \frac{108 - 4 \cdot 18}{2} = \frac{108 - 72}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

A matriz Hessiana,  $Hess(f(x, y)) = \begin{bmatrix} -4z & 108 - 4y - 4z \\ 108 - 4z - 4y & -4y \end{bmatrix}$  e aplicada no ponto crítico, temos:

$$Hess(f(18, 18)) = \begin{bmatrix} -72 & 36 \\ 36 & -72 \end{bmatrix}$$

$$|Hess(f(18, 18))| = (-72)^2 - 36^2 = 5184 - 1296 = 3888 > 0$$

E  $f_{yy}(18, 18) = -72 < 0$ , implicando que  $(18, 18)$  é um ponto de máximo.

Substituindo os valores encontrados na equação (34),  $x = 108 - 4 \cdot 18 = 36$

E temos finalmente as medidas da caixa são:  $x = 36, y = 18$  e  $z = 18$  e seu volume máximo é  $11.664 \text{ pol}^3$ .

## 4.4. Simulação de Problemas no GeoGebra

Para fazer a simulação de um determinado problema de otimização, precisa-se já ter modelado o problema e encontrado a função objetivo e a restrição, após isso, determinar a função com duas variáveis, da qual se procura o ponto ótimo da função.

E com esta função de duas variáveis que será inserida no Geogebra com o comando Se (<Condição>, <Então>), sendo no lugar de <Então> colocar a função com duas variáveis. Com a ferramenta Ponto, selecionar um ponto

do gráfico. Assim, usando as coordenadas do ponto selecionado, conforme a tabela a seguir:

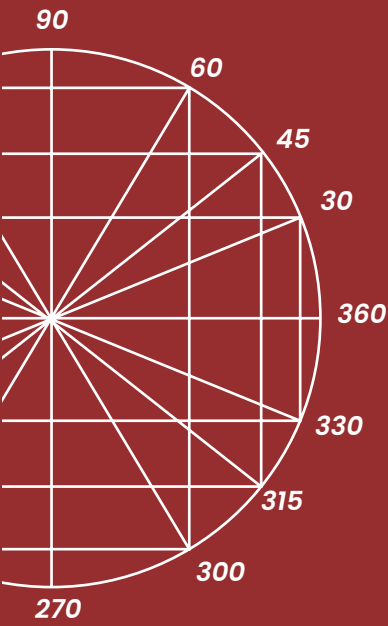
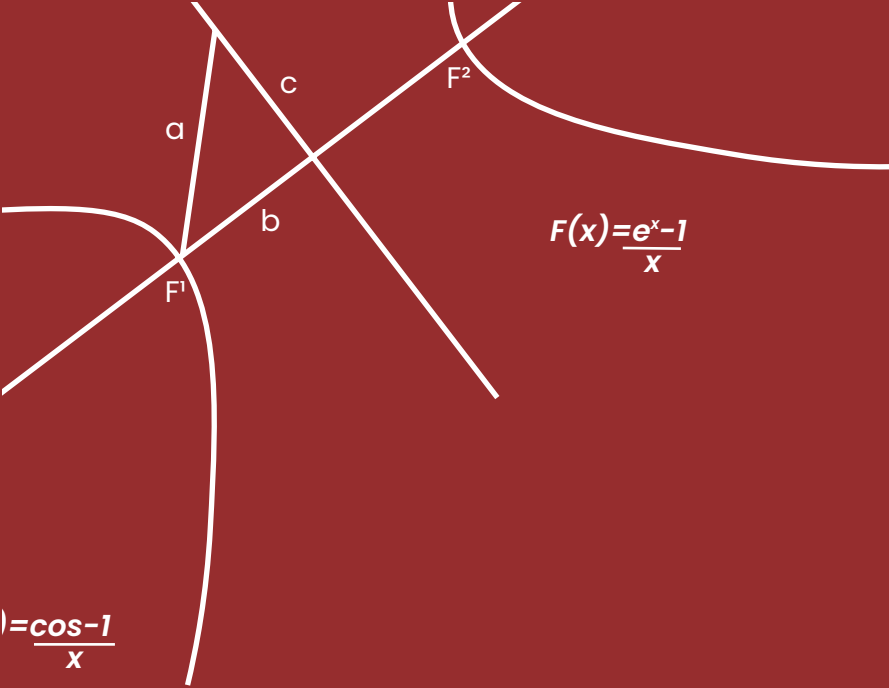
**Tabela 9.** Comandos para utilizar na simulação de problemas

<b>Descrição</b>	<b>Comando a ser executado na ENTRADA</b>
Ponto	$P$ (selecionado sobre a superfície)
Abcissa	$x(P)$
Ordenada	$y(P)$
Cota	$z(P)$

**Fonte:** Da autora

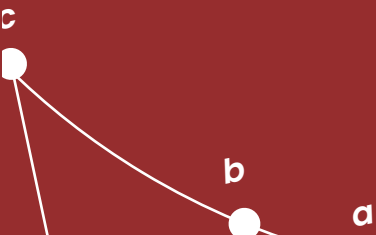
Assim, se no problema estiver solicitando um prisma, então, neste caso, para descrever os vértices do prisma, serão utilizadas as coordenadas (conforme a Tabela 9), para assim, ao mover o ponto sobre a superfície, conseguir determinar o volume ou o que for solicitado no problema.

Claramente, cada problema será modelado diferentemente um do outro.



# Integrais Duplas

Capítulo 05

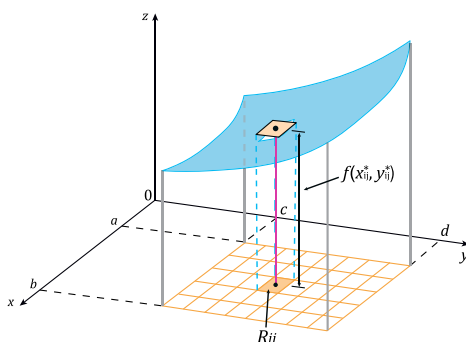


Neste capítulo, o estudo sobre integração permite calcular volumes de figuras espaciais, ou mesmo área de figuras planas. Mesmo que as regiões sobre as quais as funções serão integradas forem retangulares ou circulares, pode-se ter o seu cálculo, utilizando-se das coordenadas retangulares ou coordenadas polares.

## 5.1. Integrais Duplas

De modo semelhante ao Cálculo integral de função com uma variável, podemos estender o processo das aproximações de volumes, através de somas de Riemann. Já sabe-se que o gráfico de uma função com duas variáveis gera uma superfície no espaço tridimensional. Imagine que estamos tentando aproximar o volume contido abaixo da superfície  $S$  e acima de uma região no plano retangular, conforme mostra a Figura 40.

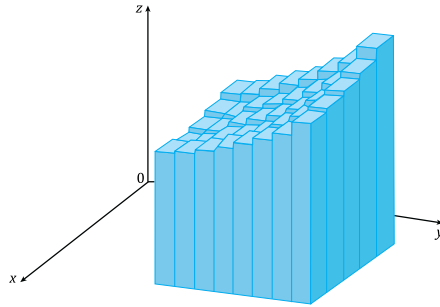
**Figura 40.** Visualização da aproximação dos prismas retangulares



**Fonte:** Stewart, 2017

Na Figura 40, temos no plano  $x0y$  um retângulo  $R = [a, b] \times [c, d]$ , denominando-se o primeiro intervalo em relação à sua base, ou sua variação no eixo dos  $x$ , e o segundo intervalo representando sua altura, ou sua variação no eixo  $y$ . Considerando uma partição, tanto do eixo dos  $x$  quanto do eixo  $y$  podemos definir um elemento minimal  $R_{ij}$ , onde dentro de tal sub-retângulo, podemos escolher um representante para majorar o “teto” do prisma, através de sua imagem,  $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ . Fazendo isso para cada sub-retângulo, provindo das partições simultâneas, podemos considerar a soma dos volumes de tais prismas e, assim, aproximar o volume do sólido formado abaixo da superfície  $s$  e acima do retângulo  $R$ , conforme mostra a Figura 41.

**Figura 41.** Representação do sólido através dos prismas retangulares



Fonte: Stewart, 2017

Quanto mais refinado se tiver as partições nos eixos coordenados  $x$  e  $y$ , melhor será a aproximação do Volume do sólido em questão, ou seja, consideramos o valor para o volume dado por:

$$V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

onde  $m, n$  são a quantidade de sub-intervalos nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente e  $\Delta A = \Delta x \Delta y$  a área da base de cada prisma retangular.

**Definição: [Integrais Duplas]** Seja  $f = f(x, y)$ . A integral dupla de  $f$  sobre o retângulo  $R$  é

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

caso exista.

**Observação:** Uma vez que  $f(x, y) > 0$  então podemos associar o volume do sólido formado abaixo da superfície (gráfico de  $f$ ) e acima do retângulo  $R$  por:

$$V = \iint_R f(x, y) dA$$

onde  $dA$  é o elemento de área.

## 5.2. Integrais Iteradas - Coordenadas Retangulares

O cálculo das integrais duplas contendo seus limites de integração, conforme a variação do Retângulo  $R$  visto na seção 5.1, será calculado de “dentro para fora”, levando-se em consideração a mesma regra para derivação parcial, isto é, quando estiver se calculando a integral em relação à variável  $x$ , por exemplo, a variável  $y$  se torna constante, valendo as regras de integração para funções com uma variável.

**Definição: [Cálculo de Integrais iteradas]** Seja  $f = f(x, y)$  e  $R = [a, b] \times [c, d]$  um retângulo no plano, então as integrais de  $f$  sobre  $R$  serão dadas por:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (38)$$

ou ainda:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (39)$$

A igualdade do resultado, ou seja, ser indiferente calcular a integral iterada por meio da equação (38) ou da equação (39), vem do Teorema de Fubini.

Chamamos o cálculo apresentado acima, de **Integração em Coordenadas Retangulares**.

**Observação:** Importante prevalecer dentro de cada integral, “de dentro para fora”, que o elemento  $dx$  acompanhará a variação no eixo  $x$  e o elemento  $dy$  acompanhará a variação no eixo  $y$ .

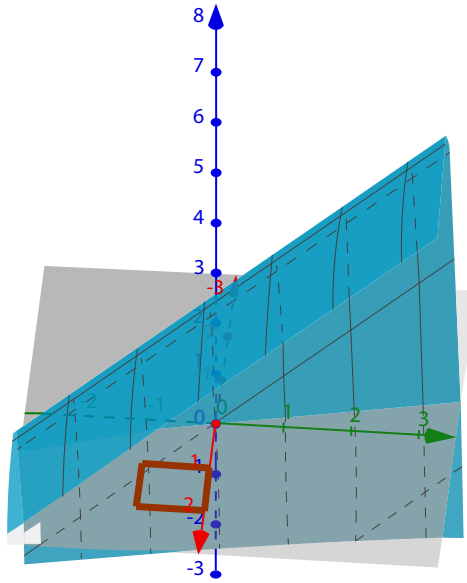
Caso a função  $f(x, y)$  puder ser separada num produto  $f(x).g(y)$ , então neste caso, e somente neste, pode-se separar a integral num produto dado como segue:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy \quad (40)$$

**Exemplo 32.** Determine o volume do sólido abaixo do gráfico da função  $f(x, y) = x^2 + y + 4x$  e acima do retângulo  $R = [1, 2] \times [-1, 0]$ .

**Resolução:** Podemos escolher se o elemento de área  $dA$  como sendo  $dx dy$  ou  $dy dx$  desde que se preserve a variação de cada variável.

**Figura 42.** Visualização da superfície dada por  $f$  e a região  $R$



**Fonte:** App GeoGebra Calculadora 3D

Escolhendo  $dx dy$ , e seguindo a forma como na equação (38), tem-se:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{-1}^0 \int_1^2 (x^2 + y + 4x) dx dy = \int_{-1}^0 \left[ \int_1^2 (x^2 + y + 4x) dx \right] dy = \\
 &= \int_{-1}^0 \left. \frac{x^3}{3} + yx + \frac{4x^2}{2} \right|_1^2 dy = \int_{-1}^0 \left( \frac{2^3}{3} + y \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 \right) - \left( \frac{1^3}{3} + y \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 \right) \\
 dy &= \int_{-1}^0 \left( \frac{7}{3} + y + 6 \right) dy = \frac{7}{3}y + \frac{y^2}{2} + 6y \Big|_{-1}^0 = (0) - \left( \frac{7}{3}(-1) + \frac{(-1)^2}{2} + \right. \\
 &= 6(-1) \left. \right) = - \left( -\frac{7}{3} + \frac{1}{2} - 6 \right) = - \frac{-14+3-36}{6} = \frac{47}{6} \text{ u. v.}
 \end{aligned}$$

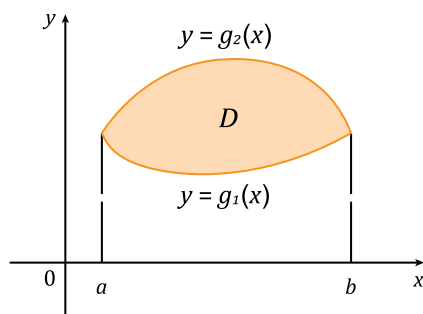
## 5.3. Mudança de Regiões Admissíveis, Alternância do elemento de área

Algumas vezes, a Região sobre a qual a integral será integrada é formada por duas funções de uma variável e assim temos dois tipos importantes de situações:

**Tipo I:** Quando, ao mapear a região no plano sobre a qual se integrará a função for delimitada:

$$D: \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

Figura 43. Visualização da região D "Tipo I"

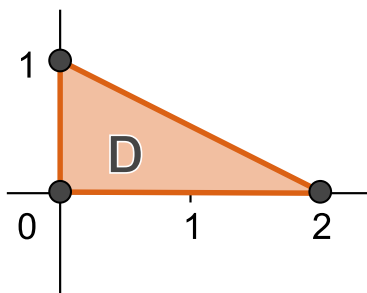


Fonte: Stewart, 2017

**Tipo II:** Quando, ao mapear a região no plano sobre a qual será integrada for delimitada:

$$D = \{(x, y) | f_1(y) \leq x \leq f_2(y), c \leq y \leq d\}$$

Figura 44. Visualização da Região D "Tipo II"

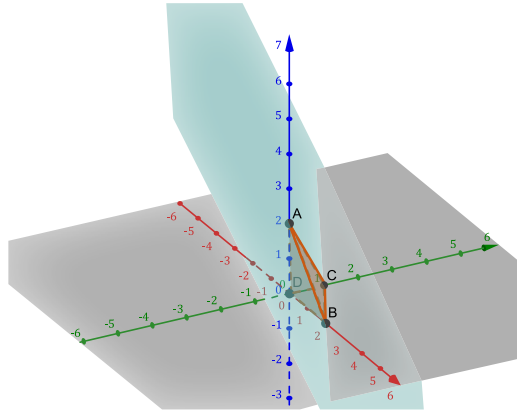


Fonte: Stewart, 2017

**Observação:** Sempre, em qualquer um dos tipos listados acima, deixarmos na integral de “fora” a variação numérica, assim pode-se ter um número real.

**Exemplo 33.** Determine o volume de um Tetraedro limitado pelo plano  $x + 2y + z = 2$  e os eixos coordenados.

**Figura 45.** Visualização do plano e do Tetraedro

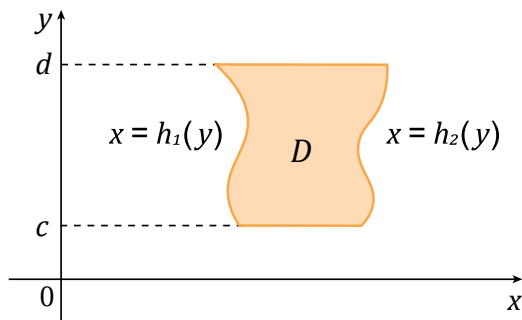


**Fonte:** App GeoGebra Calculadora 3D

Como já sabemos o integrando, que neste caso é a função  $z = 2 - x - 2y$  basta agora entender a projeção do sólido no plano  $xOy$  e delimitar a região dada.

Na Figura 45, podemos facilmente visualizar a projeção, a qual se trata de um triângulo, cujos vértices são  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  e  $(0,1)$ . Representada na Figura 46:

**Figura 46.** Projeção do Tetraedro sobre o plano  $xOy$



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

Podemos, assim, escolher, ou Tipo I ou Tipo II para resolvermos esse problema. Pelo Tipo I, temos que determinar a reta que passa pelos pontos (0,1) e (2,0). Fazendo um sistema com a equação da reta dada por  $y = ax + b$ , podemos, de maneira simples, verificar que a equação é  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ . Mapeando a Região  $D$  (Figura 46), escreve-se:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq -\frac{1}{2}x + 1 \right\}$$

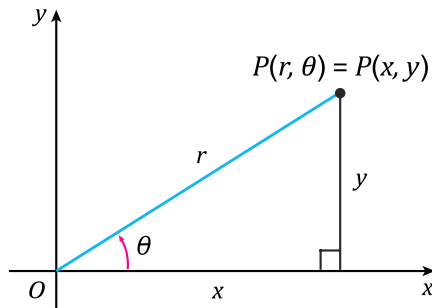
Assim, o volume do Tetraedro será dado por:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \int_0^{-\frac{1}{2}x+1} (2-x-2y) dy dx = \int_0^2 2y - xy - 2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{-\frac{1}{2}x+1} dx = \\ &= \int_0^2 2 \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right) - x \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right) - \left( -\frac{1}{2}x + 1 \right)^2 dx = \int_0^2 -x + 2 + \frac{x^2}{2} - x - \left( \frac{1}{4}x^2 - x + 1 \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left( -x + 1 + \frac{x^2}{4} \right) dx = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{x^3}{12} \Big|_0^2 = -\frac{2^2}{2} + 2 + \frac{2^3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} u.v \end{aligned}$$

## 5.4. Integrais em Domínios Circulares - Coordenadas Polares

Nesta seção, sempre que a região sobre a qual a função será integrada for circular, é sempre melhor trabalhar em coordenadas polares. Ou seja, um ponto que está mapeado por suas coordenadas retangulares  $(x, y)$  pode ser expresso em termos do raio e do ângulo  $(r, \theta)$  (como na Figura 47).

**Figura 47.** Representação de um ponto em coordenadas



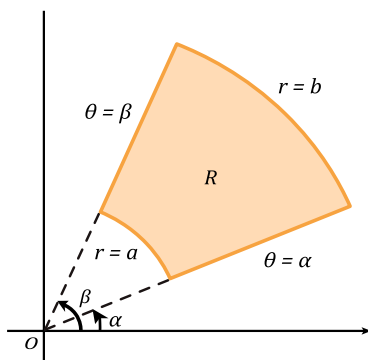
Fonte: Stewart, 2017

Na Figura 47 pode-se notar um triângulo retângulo com hipotenusa  $r$ , cateto adjacente  $x$  e cateto oposto ao ângulo  $\theta$  sendo  $y$ . Logo, as coordenadas de  $x$  e  $y$  em relação à  $r$  e  $\theta$  são:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta & (41) \\ y = r \sin \theta & (42) \end{cases}$$

Sendo a Figura 48 a região circular sobre a qual a função  $f = f(x, y)$  será integrada.

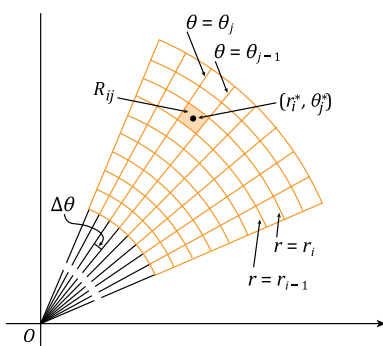
**Figura 48.** Representação do Retângulo Polar



**Fonte:** Stewart, 2017

Tem-se, assim, a partição da região circular, em termos do raio e do ângulo, conforme a Figura 49.

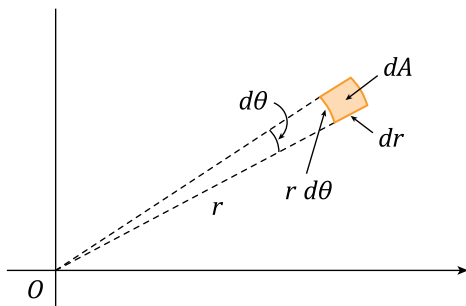
**Figura 49.** Partição do Retângulo Polar em termos do raio e do ângulo



**Fonte:** Stewart, 2017

Ampliando o elemento de área que será um sub-retângulo polar (Figura 50).

**Figura 50.** Elemento de área com base o setor circular  $r d\theta$  e altura  $dr$



**Fonte:** Stewart, 2017

Pode-se constatar que  $dA = r dr d\theta$ , onde  $r$  é o fator de correção na passagem de mudança de coordenadas.

Assim, a integral dupla em coordenadas polares será dada por:

$$\iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (43)$$

Assim sendo, podemos ter a equação (44) que dá a mudança de coordenadas retangulares (lado esquerdo) para coordenadas polares (lado direito).

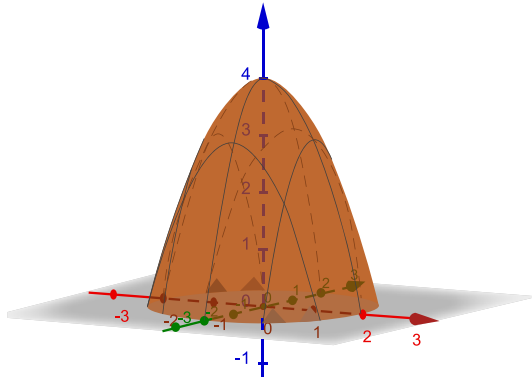
$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \quad (44)$$

**Observação:** Sempre se deve levar em conta a distributiva do elemento de correção na função e  $R$  representa as variações do raio  $r$  e do ângulo  $\theta$ .

**Exemplo 34.** Calcule o volume do sólido compreendido dentro do parabolóide  $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$  e limitado do plano  $z = 0$ .

**Resolução:** O ideal, para se ter uma noção do que se está calculando, é necessário um desenho que descreva as limitações do sólido (Ver Figura 51).

**Figura 51.** Representação do parabolóide e do plano



**Fonte:** App GeoGebra Calculadora 3D

Para obter os limites de integração, tem-se que fazer a projeção do sólido sobre o plano  $xOy$ , ou na interseção dos objetos envolvidos (funções, planos, curvas e outros). Neste caso, igualando as funções, temos a Figura interseção dada por uma circunferência  $x^2 + y^2 = 4$ , que tem centro na origem e raio 2. De onde retiramos a variação em relação ao raio e ao ângulo,  $0 \leq r \leq 2$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Montamos a integral para o cálculo do volume, como segue:

$$V = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4 - x^2 - y^2) dy dx$$

Ou, em coordenadas polares, levando em consideração as equações (41) e (42), temos que  $x^2 + y^2 = r^2$ .

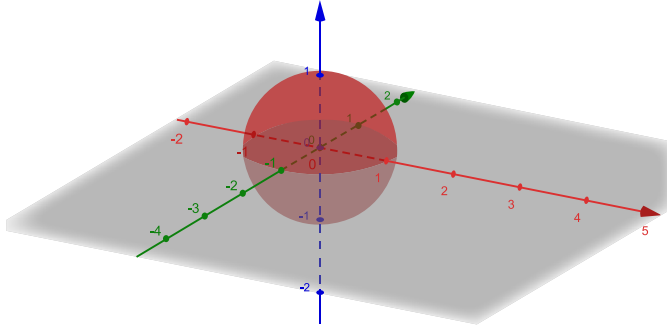
$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta \quad (45)$$

Resolvendo a integral em (45), temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (4r - r^3) dr = \theta \Big|_0^{2\pi} \left( 4 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^2 \\ &= 2\pi \cdot \left( 2 \cdot 2^2 - \frac{2^4}{4} \right) = 8\pi \text{ u. v} \end{aligned}$$

**Exemplo 35.** Encontre uma fórmula para o volume de uma esfera com centro na origem e raio 1.

Figura 52. Esfera centrada na origem e raio unitário



Fonte: App GeoGebra Calculadora 3D

**Resolução:** Primeiramente, a equação que descreve a esfera é  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e, portanto, precisamos de duas parametrizações para cobrir a esfera por inteiro. Sendo as funções  $f(x, y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Como se quer o volume total da esfera, sabemos que o plano  $xOy$  divide o volume ao meio e, assim, precisamos calcular somente a parte acima do plano e, no final, multiplicarmos por 2.

Nessas condições, já temos o integrando, que é a função  $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ . Agora, precisa-se da projeção da Figura trabalhada no plano, ou seja, fazendo  $z = 0$  na equação da esfera, temos o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ . Logo, representando o volume da esfera em coordenadas retangulares, representada no plano por uma região Tipo I, temos:

$$V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} dy dx$$

Ou em coordenadas polares, o que é mais apropriado:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r dr d\theta \quad (46)$$

Integrando (46):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \, r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \sqrt{1-r^2} \, r dr \\ &= \theta \Big|_0^{2\pi} \cdot \left( -\frac{1}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \right) = 2\pi \cdot \left( -\frac{1}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

Lembre-se que  $\frac{2\pi}{3}$  representa o volume da parte acima do plano. Logo, o volume total da esfera é  $2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$  u.v.

**Exemplo 36. [Volume de uma Esfera]** Utilizando a equação da esfera com raio qualquer positivo, ou seja,  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , mostra-se que seu volume é  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

**Resolução:** Análogo ao Exemplo 35.

## 5.5. Cálculo de Áreas via Integrais Duplas

Pode-se adaptar a integral dupla para calcular áreas apenas considerando a função no integrando como sendo  $f(x,y) = 1$ . Tornando a integral adaptada por:

$$A = \iint_R 1 \, dA$$

**Exemplo 37.** Calcule a área do círculo centrada na origem e de raio 1.

**Resolução:** Sabe-se que o círculo tem equação igual a  $x^2 + y^2 = 1$  e representará na integral dupla a região  $D$ .

Assim, a integral em coordenadas retangulares - Tipo I será:

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dy dx$$

ou, em termos das coordenadas polares, o que é mais indicado:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 1 \, r dr d\theta \quad (47)$$

Desenvolvendo a equação (47):

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 1 r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 r dr = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^1 = 2\pi \frac{1}{2} = \pi \text{ u.a}$$

**Exemplo 38. [Área do Círculo]** Considerando a equação de um círculo centrado na origem e de raio  $r$ ,  $r > 0$ , ou seja, a equação  $x^2 + y^2 = r^2$ , mostra-se que sua área é  $\pi r^2$ .

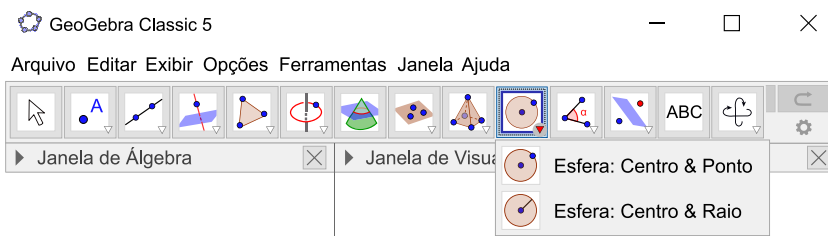
**Resolução:** Análogo ao Exemplo 37.

## 5.6. Cálculo de Volumens com o uso do GeoGebra

Para alguns objetos na calculadora 3D, em Ferramentas, é possível construir alguns sólidos, dos quais seu volume será automaticamente especificado na Janela de Álgebra.

No caso do Exemplo 37, utilizando-se a ferramenta Esfera: Centro & Raio, conforme Figura 53, na qual podemos ver que o ponto, que será o Centro da Esfera, logo em seguida, será solicitado o valor do raio. Ou, de outra maneira, na ENTRADA escrevendo-se Esfera(<Centro>, <Raio>).

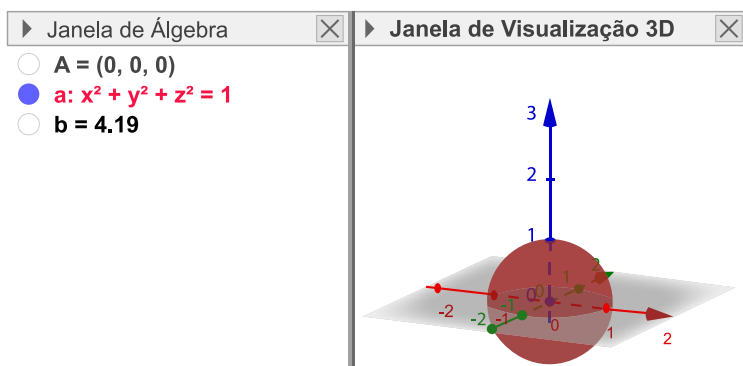
**Figura 53.** Exibição da Ferramenta com botões na área de visualização 3D



**Fonte:** Suíte GeoGebra Calculadora

Após a inserção dos dados solicitados, a Esfera é gerada e, na Janela de Álgebra, é possível verificar a sua equação. Para verificar o volume da Esfera, deve-se colocar na ENTRADA Volume(<Objeto>). Identificando o Objeto com o nome dado na Janela de Álgebra, o volume será destacado com duas casas decimais, usando o valor de  $\pi = 3,14$ .

**Figura 54.** Demonstração do cálculo de Volume da Esfera



**Fonte:** Suíte GeoGebra Calculadora

# Referências

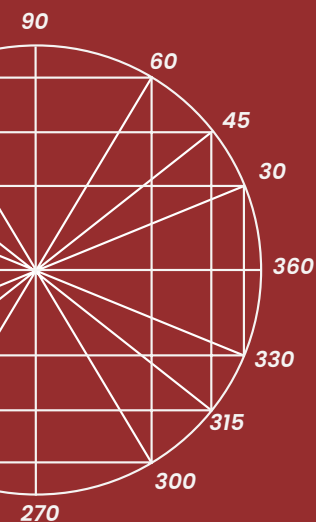
- AOPACK Máquina Automática para Fabricar Caixas de Papelão. *Apolo Sistemas gráficos*. Disponível em: <https://images.app.goo.gl/NG7KSvG2rEVmyNmU6>.
- CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Textos Universitários. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. Volume 2. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. Volume 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- ÍNDICE do Banco de Exercícios de Cálculo 3: Regra da cadeia. e-*Banco de Exercícios*. Disponível em: [https://mat.unb.br/grad/aulas/cadernos\\_calculo/calculo3/b\\_e/exibe\\_exercicio.php?id=215](https://mat.unb.br/grad/aulas/cadernos_calculo/calculo3/b_e/exibe_exercicio.php?id=215).
- STEWART, J. *Cálculo*. Volume II. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

$$F(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

# Sobre a autora

## Elainne Ladislau Ferreira Pereira

Nascida em Manaus/AM. Mestre na área de Matemática Pura em Álgebra, com o título de dissertação *Subgrupos Normais finitamente gerados em Grupos Limites*, em 2006, pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Especialista em Ensino de Matemática, cujo trabalho de conclusão, realizado em 2004, é intitulado *Analfabetismo Matemático nas Escolas Públicas de Manaus-AM*. Licenciada em Matemática, em 2002. Atualmente, é pesquisadora na área de Educação Matemática e Matemática Aplicada pela Universidade do Estado do Amazonas (UEA), onde também é professora efetiva, lotada na Escola Superior de Tecnologia (EST), trabalhando com o ciclo básico de Engenharias (Civil, Mecânica, Controle e Automação, Naval, Produção, Elétrica, Eletrônica), Licenciaturas de Informática e Meteorologia. Possui publicações em diversos Congressos e Encontros relacionados à Educação Matemática, Matemática e Engenharia, atuando, também, em Projetos de Extensão e de Iniciação Científica. É autora das obras *Álgebra Linear com o uso de Softwares Educacionais* e *Álgebra Linear: análise de espaços vetoriais a cônicas e quádricas v.2.*, publicadas pela Editora UEA.



**título** Cálculo: Trabalhando com curvas e superfícies com o uso de software educacional v. 2

**autora** Elaine Ladislau Ferreira Pereira

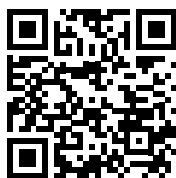
**tipografias** Raleway  
Source Serif Variable  
Tinos

**número de páginas** 97

Setembro de dois mil e vinte e cinco, dezessete anos após a publicação da obra *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*, de Selma Arenales e Artur Darezzo.

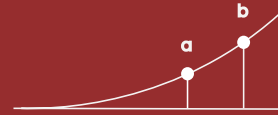
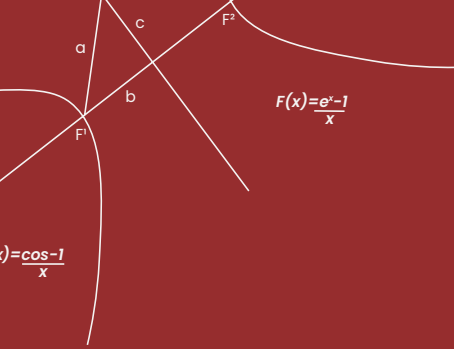


para conhecer mais da **editoraUEA** e de nossas publicações,  
acesse o qr code abaixo



ueaeditora



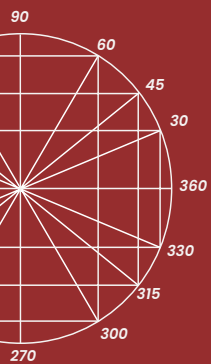


Já parou para pensar como o nosso mundo depende dos espaços bidimensionais e tridimensionais? Assim como vivemos em um universo de formas, profundidades e dimensões, as funções matemáticas também precisam se expandir. Depois de compreender as funções reais em uma dimensão, é hora de ampliar horizontes e mergulhar nos espaços vetoriais —  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ .

Este livro, continuação natural de Cálculo – Análise de Gráficos de Funções Reais e suas Aplicações com o uso de Software, convida você a explorar um novo universo matemático: curvas e superfícies. A partir do que você já conhece sobre cálculo diferencial e integral, serão introduzidas funções vetoriais e seus gráficos nos planos e no espaço, com auxílio de softwares educacionais que facilitam a visualização e a análise. Você encontrará aqui desde curvas simples, como retas e parábolas, até formas mais complexas como cônicas, espirais e hélices. E, naturalmente, avançará para as superfícies — objetos matemáticos que representam um passo além, permitindo o cálculo de áreas, volumes e a modelagem de fenômenos mais próximos da realidade. Um mundo cheio de curvas, torções e infinitas possibilidades está à sua espera. Com teoria, prática e tecnologia, este livro amplia seu olhar e prepara você para novos desafios no estudo e na aplicação do Cálculo.

*Elainne Ladislau Ferreira Pereira*

**Professora Efetiva e membro da Comissão de Extensão  
Universidade do Estado do Amazonas - UEA**



*editora*  
**UEA**



**UEA**  
UNIVERSIDADE  
DO ESTADO DO  
AMAZONAS



**AMAZONAS**  
GOVERNO DO ESTADO