

$$\sqrt{x^2 + y^2} + z^2$$

$$\vec{v}_1 = (x_1, \dots)$$

$$\frac{1}{3} \vec{u}$$

$$a^2 b^2$$

$$(a + 3b)$$

$$\frac{5}{2} \neq \frac{2}{5}$$

# ÁLGEBRA LINEAR

ANÁLISE DE ESPAÇOS VETORIAIS A CÔNICAS E QUÁDRICAS

# ÁLGEBRA LINEAR

ANÁLISE DE ESPAÇOS VETORIAIS A CÔNICAS E QUÁDRICAS

Governo do Estado do Amazonas

Wilson Miranda Lima

**Governador**

Universidade do Estado do Amazonas

André Luiz Nunes Zogahib

**Reitor**

Kátia do Nascimento Couceiro

**Vice-Reitora**

*editora***UEA**

Isolda Prado de Negreiros Nogueira Horstmann

**Diretora**

Maria do Perpetuo Socorro Monteiro de Freitas

**Secretária Executiva**

Wesley Sá

**Editor Executivo**

Raquel Maciel

**Produtora Editorial**

Isolda Prado de Negreiros Nogueira Horstmann (Presidente)

Allison Marcos Leão da Silva

Almir Cunha da Graça Neto

Erivaldo Cavalcanti e Silva Filho

Jair Max Furtunato Maia

Jucimar Maia da Silva Júnior

Manoel Luiz Neto

Mário Marques Trilha Neto

Silvia Regina Sampaio Freitas

**Conselho Editorial**

# ÁLGEBRA LINEAR

ANÁLISE DE ESPAÇOS VETORIAIS A CÔNICAS E QUÁDRICAS



*editora*  
**UEA**

Elainne Ladislau Ferreira Pereira

Wesley Sá  
**Coordenação Editorial**

Khalyl Carvalho  
**Diagramação**

Ana Carolina Bezerra  
**Projeto Gráfico**

Khalyl Carvalho  
**Finalização**

Sindell Amazonas  
André Teixeira  
Carlos Viana  
Lucas Ramos  
**Revisão**

Todos os direitos reservados © Universidade do Estado do Amazonas

Permitida a reprodução parcial desde que citada a fonte

Esta edição foi revisada conforme as regras do Novo Acordo Ortográfico da  
Língua Portuguesa

P436a  
2024

Pereira, Elaine Ladislau Ferreira  
Álgebra linear: análise de espaços vetoriais a cônicas e quádricas  
v. 2 / Elaine Ladislau Ferreira Pereira. 1. ed. – Manaus (AM):  
Editora UEA, 2024.  
108 p.: il., color., 24 cm [Ebook].

ISBN: 978-85-7883-678-8

Ebook, no formato PDF

Inclui referências bibliográficas

1. Álgebra Linear. 2. Vetoriais. 3. Quádricas.  
I. Título.

CDU 1997 – 512.64

*Elaborada pela bibliotecária Sheyla Lobo Mota CRB11/484*

Editora afiliada:



Associação Brasileira  
das Editoras Universitárias

*editora***UEA**

Av. Djalma Batista, 3578 – Flores | Manaus – AM – Brasil  
CEP 69050-010 | +55 92 38784463  
editora.uea.edu.br | editora@uea.edu.br

$$\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$$

$$\frac{1}{3}\vec{u}$$

# SUMÁRIO

<b>Prefácio</b>	<b>8</b>
<b>Capítulo 1</b>	<b>9</b>
<b>ESPAÇOS VETORIAIS</b>	
1.1. Espaço Vetorial	10
1.1.1. Exercícios de Fixação	13
1.2. Subespaços Vetoriais	13
1.2.1. Exercícios de Fixação	16
1.3. Combinação Linear	16
1.3.1. Exercícios de Fixação	20
1.4. Dependência e Independência Linear	21
1.4.1. Exercícios de Fixação	22
1.5. Base e Dimensão	23
1.5.1. Exercícios de Fixação	29
1.6. Componentes de um vetor	30
1.6.1. Exercícios de Fixação	31
1.7. Isomorfismos	32
<b>Capítulo 2</b>	<b>34</b>
<b>ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDEANOS</b>	
2.1. Produto Interno	35
2.2. Módulo ou Norma ou Comprimento	36
2.2.1. Exercícios de Fixação	37
2.3. Espaços Vetoriais Normados - EVN	38
2.4. Condições de Ortogonalidade	39
2.4.1. Exercícios de Fixação	42

$$p_r(-1, 3, 0)$$

$(a, b, a +$

2.5. Componentes de um vetor numa Base Ortogonal	42
2.5.1. Exercícios de Fixação	44

## **Capítulo 3** **45**

### **TRANSFORMAÇÕES LINEARES**

3.1. Transformação Linear - TL	46
3.1.1. Operador Linear - OL	46
3.2. Núcleo e Imagem de uma TL	47
3.2.1. Exercícios de Fixação	49
3.3. Matriz de uma TL	49
3.3.1. Matriz Canônica de uma TL	51
3.3.2. Matriz de um OL	53
3.3.2.1. Mudança de Base	53
3.3.2.1.1. Exercícios de Fixação	55
3.3.3. Tipos Especiais de Operadores Lineares	56
3.3.3.1. Operadores Lineares Planos	56
3.3.3.1.1. Operador Linear Rotação 2D	58
3.3.3.2. Operadores Lineares Espaciais	59
3.3.3.3. Exercícios de Fixação	63
3.3.4. Operadores Ortogonais	64
3.3.5. Operador Simétrico ou Autoadjunto	64
3.3.6. Operador Invertível	65
3.4. Determinação de uma TL	65
3.5. Operações entre TL's	71
3.5.1. Exercícios de Fixação	73

<b>Capítulo 4</b>	<b>74</b>
<b>DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES</b>	
4.1. Autovalor e Autovetor	75
4.2. Determinação dos Autovalores e Autovetores	75
4.3. Propriedades dos Autovalores e Autovetores	78
4.3.1. Exercícios de Fixação	79
4.4. Diagonalização de Operadores	79
4.4.1. Exercícios de Fixação	84
<b>Capítulo 5</b>	<b>86</b>
<b>FORMAS QUADRÁTICAS</b>	
5.1. Forma Quadrática no Plano - Cônicas	87
5.1.1. Exercícios de Fixação	94
5.2. Forma Quadrática no Espaço - Quádricas	95
5.2.1. Exercícios de Fixação	101
5.3. Construção de Cônicas e Quádricas no GeoGebra	102
5.3.1. Exercícios de Fixação	105
<b>Referências</b>	<b>106</b>
<b>Sobre a autora</b>	<b>107</b>

$$\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$$

# PREFÁCIO

Como uma continuidade do livro *Álgebra Linear com o uso de softwares educacionais*, no qual foram tratados vetorialmente ponto, retas, planos, distâncias e cônicas, esta obra foi pensada e escrita para que possa se ter um maior detalhamento acerca de temas estudados na disciplina de Álgebra Linear II, constando algumas dúvidas captadas em sala ou esclarecimentos e mostrando a importância da construção de cônicas e quádras, utilizando a diagonalização de operadores simétricos e de maneira que possam ser visualizados no aplicativo GeoGebra, assim como algumas construções geométricas cônicas e quádras.

O segundo volume da obra *Álgebra Linear* permite trabalhar com ambientes diferentes, construindo um espaço chamado de Espaço Vetorial, no qual se permite de maneira ampla trabalhar com aplicações entre Espaços Vetoriais. Conseguindo, ao final, trabalhar de maneira mais geral com as quádras, que englobam as cônicas, sendo que estas podem ser rotacionadas a partir de matrizes, ou melhor dizendo, através de um operador linear.

O enriquecimento de detalhes analíticos e construtivos levarão a uma melhor assimilação dos conteúdos.

Os tópicos tratados foram construídos juntamente com a ministração da disciplina de Álgebra Linear para os cursos de Engenharia da Escola Superior de Tecnologia – EST, da Universidade do Estado do Amazonas - UEA, trazendo uma linguagem mais coloquial, a fim de preencher lacunas do saber aos leitores.

# CAPÍTULO 1

## ESPAÇOS VETORIAIS

O espaço vetorial se origina a partir de um conjunto não-vazio que será munido das operações triviais (adição e multiplicação por escalar) e assim nascem os vetores. Um vetor por si só carrega muitas informações e, mais adiante, possui uma propriedade ímpar que é a Propriedade de Equipolência - PE, a qual permite que o vetor seja mudado de localização sem ferir suas propriedades intrínsecas. Logo após, com a adição de uma métrica nesse espaço podemos fazer as medições e cálculos de áreas e volumes.

## 1.1. Espaço Vetorial

**Definição:** Um espaço vetorial (E.V.) é constituído de um conjunto  $V$ , não-vazio, munido de duas operações, adição  $+: V \times V \rightarrow V$  e multiplicação por escalar  $\cdot: \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ , em que sejam comprovadas as seguintes operações:

I) quanto à adição:

A1) Comutatividade:  $v_1 + v_2 = v_2 + v_1; \forall v_1, v_2 \in V$

A2) Associatividade:  $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3); \forall v_1, v_2, v_3 \in V$

A3) Existência do elemento neutro:  $v + e = e + v = v; \forall v \in V, \exists e \in V$

A4) Existência do elemento simétrico:  $v + s = s + v = e; \forall v \in V, \exists s \in V$

II) quanto à multiplicação por escalar:

M1) Comutatividade:  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) = \beta(\alpha v); \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

M2) Existência do escalar 1:  $1 \cdot v = v; \forall v \in V$

III) quanto às duas operações:

D1) Distributiva em relação à adição:  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v; \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V$

D2) Distributiva em relação aos escalares:  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

**Nota:** Para cada espaço, o elemento neutro se adaptará ao espaço proposto, podendo ser o número 0, ou vetor nulo, matriz nula, polinômio nulo e assim sucessivamente.

**Exemplo 1:** O espaço dos números Reais,  $\mathbb{R}$ , em que seu elemento neutro é o número 0 e o simétrico de  $x \in \mathbb{R}$  é  $-x \in \mathbb{R}$ ; o espaço  $\mathbb{R}^n$  seu elemento neutro é o vetor de n-uplas  $0=(0,\dots,0)$ ; o espaço das matrizes de

ordem  $m \times n$ ,  $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  cujo elemento neutro é a matriz nula  $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$  ;

o espaço dos polinômios de grau  $n$ ,  $\wp^n(\mathbb{R})$  cujo elemento neutro será o polinômio nulo, a saber,  $0 = 0x^n + \dots + 0x + 0$ ; entre outros espaços que serão citados nos exemplos a seguir, todos esses espaços munidos das operações de adição e multiplicação triviais são Espaços Vetoriais.

No exemplo a seguir, mostraremos uma operação não trivial que torna o conjunto um Espaço Vetorial.

**Exemplo 2:** Considere o conjunto  $V = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$ . Mostre que  $(V, \oplus, \odot)$  é um Espaço Vetorial, no qual as operações são definidas por:

$$(x_1, x_1^2) \oplus (x_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2)$$

$$\alpha \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2)$$

**Resolução:** Para mostrar que  $V$ , munida das operações acima definidas, goza das oito propriedades definidas em 1.1.

$$\text{A1) } (x_1, x_1^2) \oplus (x_2, x_2^2) = (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2) = (x_2 + x_1, (x_2 + x_1)^2) = (x_2, x_2^2) \oplus (x_1, x_1^2) \text{ (Vale a comutativa em } \mathbb{R} \text{ para cada uma das coordenadas).}$$

$$\begin{aligned} \text{A2) } & \left( (x_1, x_1^2) \oplus (x_2, x_2^2) \right) \oplus (x_3, x_3^2) = (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2) \oplus (x_3, x_3^2) = \\ & (x_1 + x_2 + x_3, (x_1 + x_2 + x_3)^2) = \left( x_1 + (x_2 + x_3), (x_1 + (x_2 + x_3))^2 \right) = \\ & (x_1, x_1^2) \oplus (x_2 + x_3, (x_2 + x_3)^2) = (x_1, x_1^2) \oplus \left( (x_2, x_2^2) \oplus (x_3, x_3^2) \right) \end{aligned}$$

$$\text{A3) } (x, x^2) \oplus (e, e^2) = (x, x^2) \implies (x + e, (x + e)^2) = (x, x^2).$$

Pela igualdade de vetores, temos que  $x + e = x \Rightarrow e = 0$ , uma vez que as coordenadas estão em  $\mathbb{R}$ . Portanto, o elemento neutro existe e é  $e = (0,0)$ .

A4) Uma vez que da propriedade A3, o elemento neutro é  $(0,0)$ . Segue  $(x, x^2) \oplus (s, s^2) = e \Rightarrow (x + s, (x + s)^2) = (0,0)$ . Da igualdade de vetores, temos:  $x + s = 0 \Rightarrow s = -x$ . Portanto, o elemento simétrico existe e é  $s = (-x, (-x)^2)$ .

$$\text{M1) } (\alpha\beta) \odot (x, x^2) = (\alpha\beta x, (\alpha\beta)^2 x^2) = (\alpha(\beta x), \alpha^2(\beta^2 x^2)) = \alpha \odot (\beta \odot v) \\ \forall (x, x^2) \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\text{M2) } 1 \odot (x, x^2) = (1 \cdot x, 1^2 \cdot x) = (x, x^2) \forall (x, x^2) \in V.$$

$$\text{D1) } \alpha \odot ((x_1, x_1^2) \oplus (x_2, x_2^2)) = \alpha \odot (x_1 + x_2, (x_1 + x_2)^2) = (\alpha \cdot (x_1 + x_2), \alpha^2(x_1 + x_2)^2).$$

$$\text{Por outro lado, } \alpha \odot (x_1, x_1^2) \oplus \alpha \odot (x_2, x_2^2) = (\alpha x_1, \alpha^2 x_1^2) \oplus (\alpha x_2, \alpha^2 x_2^2) \\ (\alpha x_1 + \alpha x_2, (\alpha x_1 + \alpha x_2)^2) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha^2(x_1 + x_2)^2).$$

$$\text{Portanto, vem a igualdade } \alpha \odot ((x_1, x_1^2) \oplus (x_2, x_2^2)) = \alpha \odot (x_1, x_1^2) \oplus \alpha \odot (x_2, x_2^2).$$

$$\text{D2) } (\alpha + \beta) \odot (x, x^2) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)^2 x^2).$$

$$\text{Por outro lado, } \alpha \odot (x, x^2) \oplus \beta \odot (x, x^2) = (\alpha x, \alpha^2 x^2) \oplus (\beta x, \beta^2 x^2) = \\ (\alpha x + \beta x, (\alpha x + \beta x)^2) = ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)^2 x^2).$$

$$\text{Portanto, vem a igualdade } (\alpha + \beta) \odot (x, x^2) = \alpha \odot (x, x^2) \oplus \beta \odot (x, x^2).$$

Assim, com tais operações validadas, temos a comprovação de que  $(V, \oplus, \odot)$  é um espaço vetorial.

**Nota 1:** Perceba que, do jeito que foi definido, o conjunto  $V$ , no exemplo 1, se tivesse sido considerado as operações de adição e multiplicação por escalar triviais, jamais  $V$  seria um espaço vetorial.

Então, leitor, atente para como é a definição do conjunto e também para a definição das operações. Neste caso acima, percebe-se claramente uma manipulação das operações para tornar o Conjunto um E.V.

### 1.1.1. Exercícios de Fixação

Agora que você já sabe identificar todas as operações para que um determinado conjunto seja um Espaço Vetorial, vamos praticar!

1. Verifique quais são os Espaços Vetoriais, e para aqueles que são, determine explicitamente o elemento neutro e o elemento simétrico de cada E.V, e, aos que não são E.V., identifique pelo menos uma das propriedades que não seja satisfeita. Quando não houver nenhuma interferência sobre a operação, então ela é a trivial daquele referido Espaço.

a)  $V = (\mathbb{R}, +, \cdot)$

b)  $V = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

c)  $V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

d)  $V = (\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ , na qual as operações são definidas por:

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, (y_1 + y_2)^2)$$

$$\alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1)$$

e)  $V = (M_{2 \times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$

f)  $V = (M_{2 \times 3}, \oplus, \odot)$ , na qual as operações são definidas por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + 2b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + 2b_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \odot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \alpha a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

## 1.2. Subespaços Vetoriais

**Definição: [Subespaço Vetorial]** seja  $(V, +, \cdot)$  um Espaço Vetorial. Considere  $S$ , um subconjunto de  $V$  não vazio. Dizemos que  $S$  é um subespaço vetorial de  $V$  se  $(S, +, \cdot)$  satisfizer as oito operações de Espaço Vetorial.

**Proposição: [Subespaço Vetorial]** seja  $(V, +, \cdot)$  um espaço vetorial e  $S$  um subespaço de  $V$ ,  $S \subset V$ . Então  $S$  é um subespaço vetorial de  $V$ , se:

i) Dados  $u, v \in S \rightarrow u + v \in S$  (é fechado em relação à operação Adição).

ii) Dados  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $v \in S \rightarrow \alpha \cdot v \in S$  (é fechado em relação à operação de Multiplicação por um escalar).

**Nota 2:** Ao admitir que  $S$  é um subespaço de  $V$ , temos a inclusão do elemento neutro em  $S$ , herdado de  $V$ .

**Definição: [Subespaço Próprio]** Os conjuntos  $\{0\}$  e  $V$  são chamados de Subespaços Próprios de  $V$ .

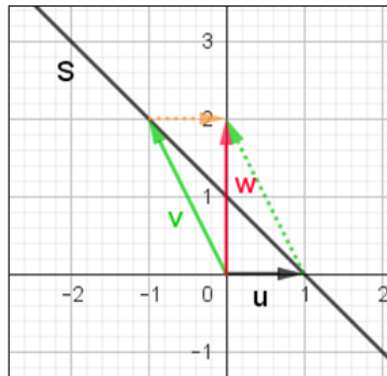
**Exercício 3:** Mostre que o conjunto  $S = \{(x, 1 - x); x \in \mathbb{R}\}$  não é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^2$ .

**Resolução:** Sejam  $u, v \in S$ , i.e,  $u = (x_1, 1 - x_1)$  e  $v = (x_2, 1 - x_2)$ . Logo  $u + v = (x_1 + x_2, 2 - (x_1 - x_2)) \notin S$ .

Com isso, não sendo fechado em relação à operação de adição, não é um subespaço vetorial.

**Observação 1:** Escolhendo valores numéricos para  $x$  no Exercício 3, por exemplo, fizermos  $x = -1$ , obtemos o vetor  $u = (-1, 2)$  e  $x = 1$ , obtemos o vetor  $v = (1, 0)$ . Na Figura 1, podemos descrever o Subespaço por uma reta definida pela equação  $y = 1 - x$ , decrescente, e o vetor soma  $w = u + v$  (diagonal maior do paralelogramo formado por  $u$  e  $v$ ) não se encontra limitado pela reta originada por  $S$ .

**Figura 1.** Representação do subespaço contido no Exercício 3



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

**Definição: [Exemplos Triviais de Subespaço]** Seja  $V$  um espaço vetorial,  $S_1$  e  $S_2$  subespaços de  $V$ , então as seguintes sentenças ainda são subespaços vetoriais de  $V$ .

I) O Espaço Soma de Subespaços Vetoriais,  
 $S_1 + S_2 = \{u + v; u \in S_1 \text{ e } v \in S_2\}$ .

II) O Espaço Interseção de Subespaços Vetoriais,  
 $S_1 \cap S_2 = \{z; z \in S_1 \text{ e } z \in S_2\}$ .

**Nota 3:** A demonstração fica a cargo do leitor.

**Exemplo 4:** Considere  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 3z = 0\}$  e  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 5x\}$ . Determine o subespaço  $S_1 \cup S_2$  e  $S_1 \cap S_2$ .

**Resolução:** Para fazer o que se pede, reescrevemos cada um dos conjuntos por:  $S_1 = \{(x, 2x + 3z, z); x, z \in \mathbb{R}\}$  e  $S_2 = \{(x, 5x, z); x, z \in \mathbb{R}\}$ .

Assim, o espaço soma:  $S_1 + S_2 = \{(2x, 7x + 3z, 2z); x, z \in \mathbb{R}\}$ .

Na determinação do espaço interseção, faz-se uma combinação das restrições de cada um dos subespaços.

$$S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 3z = 0; y = 5x\}$$

$$S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; -3x + 3z = 0; y = 5x\}$$

$$S_1 \cap S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 5x; z = x\} = \{(x, 5x, x); x \in \mathbb{R}\}.$$

**Definição: [Soma Direta]** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $S_1$  e  $S_2$  subespaços de  $V$ , dizemos que  $V$  é soma direta de  $S_1$  e  $S_2$ , i.e,  $V = S_1 \oplus S_2$ , se todo vetor de  $V$  se escreve como uma soma  $V = S_1 + S_2$  e  $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ .

O exemplo 3 não descreve uma soma direta, pois o espaço vetorial interseção é diferente do trivial  $\{0\}$ .

### 1.2.1. Exercícios de Fixação

*Treine agora para identificar os subespaços de um E.V e saber quando não são subespaços.*

1. Para cada um dos espaços vetoriais e subespaços, verifique quais são admitidos como subespaços vetoriais. Caso não seja, especifique qual a propriedade que não é válida.

a)  $V = \left( \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, +, \cdot \right), a, b, c, d \in \mathbb{R}; S = \begin{bmatrix} 1 & b \\ c & d \end{bmatrix}, b, c, d \in \mathbb{R}.$

b)  $V = ((x, y, z), +, \cdot), x, y, z \in \mathbb{R}; S = \{(x, y, z); x - 3y + z = 3\}.$   
Interprete geometricamente este fato!

c)  $V = ((x, y), +, \cdot), x, y \in \mathbb{R}; S = (x, y); x + 2y^2 = 0.$  Interprete geometricamente este fato!

2. Mostre que o  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$  com as operações triviais.

### 1.3. Combinação Linear

**Definição: [Combinação Linear]** sendo  $V$  um espaço vetorial. Escolhendo-se  $n$  vetores de  $V$ ,  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ , dizemos que  $v \in V$  é combinação linear dos vetores  $v_1, v_2, \dots, v_n$  se:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \quad (1)$$

dados  $\alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, \dots, n$ .

**Nota 4:** Os escalares  $\alpha_i$  irão desempenhar um papel de controle sobre os comprimentos dos vetores, podendo aumentar se  $|\alpha_i| > 1$ , diminuir se  $0 < |\alpha_i| < 1$  e se  $\alpha_i < 0$  inverterá o sentido dos vetores.

**Observação 2:** A equação (1) resultará em um sistema linear, no qual se o sistema for um sistema possível, então podemos escrever o vetor como combinação linear dos vetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ .

*Uma das definições mais importantes deste capítulo, sem dúvida, é a compreensão de subespaço gerado. Ou seja, determinar os vetores geradores de um Espaço ou Subespaço Vetorial.*

**Definição: [Subespaço Gerado]** seja  $V$  um espaço vetorial e  $A$  um conjunto constituído de  $n$  elementos, a saber,  $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Dizemos que o conjunto  $A$  gera o espaço vetorial  $V$ , se todo elemento de  $V$  se escrever como combinação linear dos vetores de  $A$ . Notação:  $V = G(A)$  ou  $V = [A]$ .

**Exemplo 5:** Considere o subespaço  $S \subset \mathbb{R}^3$  gerado pelos vetores  $\mathbf{v}_1 = (2,1,3), \mathbf{v}_2 = (3, -1,4)$  e  $\mathbf{v}_3 = (2,6,4)$ . Verifique se o vetor  $\mathbf{v} = (3,4,5) \in S$ .

**Resolução:** Pode-se resolver esse problema de duas formas:

I) Determinar a restrição do subespaço  $S$  e depois verificar se as coordenadas do vetor a satisfaz, ou já resolver o sistema colocando as coordenadas do vetor como combinação linear, e caso o sistema seja possível, afirmamos que o vetor pertence ao subespaço gerado.

Opta-se por I. Assim sendo, escreve-se um vetor genérico qualquer pertencente a S, logo se escreverá como combinação linear de  $v_1, v_2$  e  $v_3$ .

$$v = \sum_{i=1}^3 \alpha_i v_i = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \quad (2)$$

Substituindo as coordenadas de cada um dos vetores e aplicando as operações de adição e multiplicação por escalar provindos do subespaço, neste caso trivial, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 + 6\alpha_3 = y \\ 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3 = z \end{cases} \quad (3)$$

Reescrevendo matricialmente o sistema (3), temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & x \\ 1 & -1 & 6 & y \\ 3 & 4 & 4 & z \end{bmatrix}$$

Escalonando:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & x \\ 1 & -1 & 6 & y \\ 3 & 4 & 4 & z \end{bmatrix} \begin{matrix} 2L_1 - L_3 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 3L_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2x - z \\ -5 & -10 & 0 & y - 3x \\ 0 & 7 & -14 & z - 3y \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{7} \\ \end{matrix} \rightarrow \\ & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \frac{2x - z}{5} \\ 1 & 2 & 0 & \frac{3x - y}{5} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{z - 3y}{7} \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 - L_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2x - z - \frac{3x - y}{5} \\ 1 & 2 & 0 & \frac{3x - y}{5} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{z - 3y}{7} \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \end{aligned}$$

Para que o sistema seja Possível e Determinado, temos que ter

$$2x - z - \frac{3x - y}{5} = 0 \text{ ou } \frac{10x - 5z - 3x + y}{5} = 0.$$

O subespaço  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 7x + y - 5z = 0\}$ . Logo, para que o vetor  $v = (3, 4, 5) \in S$ , temos:

$$7 \cdot 3 + 4 - 5 \cdot 5 = 0$$

O que garante que  $v \in S$ .

A partir da definição do subespaço gerado, pode-se identificar os vetores geradores.

**Exemplo 6:** No exemplo anterior, temos que o subespaço gerado é o conjunto:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 7x + y - 5z = 0\}$$

Determine seus vetores geradores.

**Resolução:** Reescrevendo a definição do subespaço:

$$S = \{(x, 5z - 7x, z); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Utilizando as operações definidas em  $S$ , as quais são herdadas do Espaço Vetorial, temos:

$$S = \{x(1, -7, 0) + z(0, 5, 1); x, z \in \mathbb{R}\}$$

Ou seja,

$$G(S) = [(1, -7, 0), (0, 5, 1)]$$

**Observação 3:** Não se retornou aos mesmos vetores do exemplo 5, pois  $v_1$  se escreve como uma combinação linear de  $v_2$  e  $v_3$  dada pela equação abaixo:

$$4v_1 = 2v_2 + v_3$$

**Observação 4:** Se incluirmos um vetor  $w \in V$ , em que  $V = [A]$ , sendo  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Decorre da própria definição de subespaço gerado que se  $w$  é uma combinação linear dos vetores de  $A$  então vale:

$$[v_1, v_2, \dots, v_n, w] = [v_1, \dots, v_n]$$

### 1.3.1. Exercícios de Fixação

*Essa é a parte crucial do entendimento da construção dos espaços e subespaços, pois com a ideia de Combinação Linear irá se desenvolver toda uma estrutura. Por isso, é importante que se entenda cada Espaço, suas operações, combinação linear, subespaços e subespaços gerados.*

1. Sendo  $v_1 = (1,2,4)$ ,  $v_2 = (-1,1,2)$ ,  $v_3 = (3,2,-1)$ ,  $v_4 = (4,-4,8)$ , verifique e justifique se  $w = (4,-2,5)$  pode ser escrito como combinação linear de:

- a)  $e_1, e_2$  e  $e_3$ , em que  $e_1 = (1,0,0)$ ,  $e_2 = (0,1,0)$  e  $e_3 = (0,0,1)$
- b)  $v_1, v_2$  e  $v_3$
- c)  $v_1$  e  $v_2$
- d)  $v_2, v_3$  e  $v_4$

2. Determine o espaço de  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  gerado pelos vetores:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } M_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Determine os geradores dos seguintes subespaços vetoriais dados:

a)  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 2x + 7y = 0\}$

b)  $S_2 = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{P}^3(\mathbb{R}); a + b = c\}$

c)  $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}); a + d = 0 \text{ e } e - f = b \right\}$

## 1.4. Dependência e Independência Linear

**Definição: [Dependência e Independência Linear]** sejam  $(V, +, \cdot)$  um espaço vetorial e  $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ . Considere a equação:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \quad (4)$$

Na equação (4), os escalares  $\alpha_i$  são reais e  $v_i$  são os vetores pertencentes a  $A$ .

Se (4) admitir somente a solução trivial, i.e,  $\alpha_i = 0, \forall i$ , então, dizemos que o conjunto  $A$  é linearmente independente. Esta definição impede qualquer um dos vetores contidos no conjunto de se escrever como combinação linear um do outro.

Já se (4) admitir soluções  $\alpha_i \neq 0$ , dizemos que o conjunto  $A$  é linearmente dependente.

**Observação 5:** O vetor nulo pode se escrever como combinação linear de quaisquer vetores, como a seguir:

$$0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$$

Isto faz com que qualquer conjunto que contenha o vetor nulo constitua um conjunto linearmente dependente.

**Exemplo 7:** Verifique se o conjunto  $A = \{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ , onde  $p_1(t) = t^2 - 2t + 1$ ,  $p_2(t) = t + 2$  e  $p_3(t) = 2t^2 - t$  é linearmente independente.

**Resolução:** Façamos a combinação descrita em (4) utilizando os vetores de  $A$ .

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0$$

Substituindo os vetores apropriadamente:

$$\alpha_1(t^2 - 2t + 1) + \alpha_2(t + 2) + \alpha_3(2t^2 - t) = 0t^2 + 0t + 0$$

Fazendo as operações triviais e igualdade de polinômios, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Das equações (1) e (3), temos que  $\alpha_3 = \alpha_2$ . Logo em (2), temos  $-2\alpha_1 = 0$ , onde  $\alpha_1 = 0$ . Consequentemente,  $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

### 1.4.1. Exercícios de Fixação

*Agora é a sua vez de colocar em prática a verificação de vetores linearmente dependente ou linearmente independente. Sempre em mente que isto resultará num sistema homogêneo e que, muitas vezes, se necessitará da resolução via escalonamento.*

1. Para cada um dos itens, verifique se o conjunto de vetores pertencentes ao Espaço Vetorial  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  é L.D. ou L.I. Justifique suas respostas.

- a)  $C_1 = \{(1, -2)\}$
- b)  $C_2 = \{(1,0), (0,1)\}$
- c)  $C_3 = \{(1,2), (3, -1)\}$
- d)  $C_4 = \{(1,2), (3, -1), (2, -5)\}$
- e)  $C_5 = \{(1,2), (3, -1), (2, -5), (1,0)\}$

2. Com base no exercício anterior, qual o número máximo de vetores no conjunto a fim de tornar o conjunto L.I.? Existe somente um conjunto com número máximo de vetores L.I.? Justifique sua resposta.

### **Teoremas Operacionais de Dependência e Independência Linear.**

1)  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  é Linearmente Dependente se, e somente se, pelo menos um desses vetores for combinação linear dos outros.

2)  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  é Linearmente Independente se, e somente se, nenhum desses vetores se escrever como combinação linear dos outros.

## **1.5. Base e Dimensão**

*Nesta seção, iremos mostrar que um determinado Espaço ou Subespaço Vetorial possui um conjunto base para que todo e qualquer vetor dentro dele se escreva como uma combinação linear dos elementos de tal conjunto base. Porém, esse conjunto não é único, podemos ter finitas ou infinitas bases para um determinado espaço. O que irá delimitar neste caso, é o número necessário e suficiente para pertencer a tal conjunto base. Ao tratarmos de Espaços ou Subespaços finitos iremos ter um número ideal para compor cada conjunto base. Outras delimitações também serão impostas a um subconjunto, que nunca deverá exceder a dimensão do espaço que o contém. No próximo capítulo, iremos fazer a mudança de base, permitindo assim uma ampla vantagem de trabalhar com a base que for conveniente.*

**Definição: [Base de um Espaço Vetorial]** Seja  $(V, +, \cdot)$  um espaço vetorial e  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ . Dizemos que  $B$  é uma base do espaço vetorial, se:

- i)  $B$  for linearmente independente;
- ii)  $V = G(B)$

Assim, conseguimos expressar todo e qualquer vetor de  $V$  em termos dos vetores da Base.

**Exemplo 8:** Seja  $V = \mathbb{R}^3$ . Verifique se os conjuntos representam uma base para  $V$ .

- a)  $B_1 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
- b)  $B_2 = \{(-1,2,3), (4,1,2), (5, -, 1, -3)\}$

**Resolução:** Para a verificação, iremos resolver dois sistemas, genérico e homogêneo, para cada uma das letras.

a) Os elementos de  $B_1$  são nomeados  $e_1, e_2$  e  $e_3$ , pois representam os vetores canônicos do espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .

Fazendo a combinação e igualando ao vetor nulo do  $\mathbb{R}^3$ , temos:

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i e_i = 0$$

O que resulta no sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

O que ocorre quando  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Logo  $B_1$  é L.I.

Para ii) iremos novamente escrever a combinação e igualar a um vetor genérico do  $\mathbb{R}^3$ , a saber,  $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{cases} \alpha_1 + 0\alpha_2 + 0\alpha_3 = x \\ 0\alpha_1 + \alpha_2 + 0\alpha_3 = y \\ 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \alpha_3 = z \end{cases}$$

Resolvendo o sistema diretamente, a resposta será dada por:

$$\alpha_1 = x; \alpha_2 = y \text{ e } \alpha_3 = z$$

Mostrando que realmente qualquer vetor  $(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$ .

b) Os elementos de  $B_2$ , iremos chamá-los de  $v_1, v_2$  e  $v_3$ .

De modo análogo, para a verificação de  $B_2$  ser L.I, teremos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} -\alpha_1 + 4\alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 2L_1 + L_2 \\ 2L_2 - L_3 \\ L_3 + 3L_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 9 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & 12 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \frac{1}{9} \\ \dots \\ \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ L_3 - 6L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ \dots \\ L_3 + 2L_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ \dots \\ L_3 + 2L_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \dots \\ L_2 + 5L_1 \\ \dots \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O que corresponde à solução trivial, i.e,  $x = 0; y = 0; z = 0$ , indicando que o conjunto é L.I.

Analogamente, ao solucionarmos o sistema genérico, encontra-se uma solução  $\alpha_i = f(x, y, z)$ , indicando que  $B_2$  gera o  $\mathbb{R}^3$ .

**Observação 6:** Se o conjunto  $B$  tiver apenas um vetor ou dois, é fácil verificar que apesar de satisfazer a condição i) da definição de Base de um espaço vetorial, a segunda condição não seria satisfeita.

Assim, pode-se notar que para que o espaço tridimensional seja gerado, precisamos de exatamente 3 vetores, não necessariamente os mesmos vetores.

**Exemplo 9:** Verifique se os vetores  $v_1 = (1,2,3)$ ,  $v_2 = (-1,0,1)$ ,  $v_3 = (4,2,-1)$  e  $v_4 = (3,-1,2)$  são L.I.

**Resolução:** Para tal verificação, deve-se fazer a combinação linear dos vetores dados e igualar ao vetor nulo.

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 0\alpha_2 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Escrevendo matricialmente o sistema dado em (5) e resolvendo por escalonamento, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_2} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_2 + 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2L_1 - L_2} \\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 8 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_1 + 8L_3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 49 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir do momento em que as operações entre linhas fazem permutar os zeros de posição ou eliminar os zeros, o melhor a fazer é parar o escalonamento. E assim, obtemos:

$$\begin{cases} -2\alpha_2 + 49\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 13\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_3 + 7\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

Ou melhor:

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{49}{2} \alpha_4 \\ \alpha_1 = -\frac{13}{2} \alpha_4 \\ \alpha_3 = 7\alpha_4 \end{cases}$$

O que resulta em uma dependência linear de  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  em função de  $\alpha_4$ .  
O que diz que os vetores são L.D.

O resultado visto no exemplo 9 resulta no Teorema de Caracterização de uma Base para um espaço vetorial.

**Teorema:** Se  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  for uma base do espaço vetorial  $V$ , então todo conjunto com mais de  $n$  vetores será linearmente dependente.

A demonstração deste fato se dá pela definição de independência dos vetores (Condição i). (Verificar [1])

**Corolário:** Duas bases quaisquer de um espaço vetorial têm o mesmo número de vetores.

**Definição: [Dimensão de um Espaço Vetorial]** seja  $(V, +, \cdot)$  um espaço vetorial cuja base possua  $n$  vetores, então a dimensão de  $V$  é igual a  $n$ .  
Notação:  $\dim(\quad)$ .

**Observações:**

I) Se  $V$  tiver uma base que contenha apenas o vetor nulo, dizemos que  $\dim V = 0$  (Convenção).

II) Se  $V$  tiver uma quantidade finita de vetores na base, então dizemos que  $V$  tem dimensão finita.

III) Se  $V$  tiver uma quantidade infinita de vetores na base, dizemos que  $\dim(V) = \infty$ .

IV) Se  $S \subset V$  subespaço, então  $\dim(S) \leq \dim(V)$ .

V) [**Completamento de uma base**] se  $B'$  for um conjunto com vetores linearmente independente, constituindo uma parte da base de  $V$ , podemos completá-la até formar uma base para  $V$ .

VI) [**Convenção**] se  $V = \{0\}$ , então  $\dim V = 0$

**Exemplo 10:** Considere  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + 3z = 0\}$  e  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 5x\}$ . Determine uma base para os subespaços  $S_1 \cup S_2$  e  $S_1 \cap S_2$ .

Lembre-se de que este exercício foi feito (Exemplo 3) explicitamente, mas iremos enfatizar a base de cada um dos subespaços envolvidos e fazendo valer a relação válida para subconjuntos, que será validada também para subespaços vetoriais:

$$\dim(S_1 \cup S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) \quad (6)$$

**Resolução:** Podemos reescrever  $S_1$  como:

$S_1 = \{(x, 2x + 3z, z); x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1); x, z \in \mathbb{R}\}$ . Ou seja, temos que os geradores de  $S_1$ , i.e,  $G(S_1) = [(1, 2, 0), (0, 3, 1)]$ . Analogamente para  $S_2$ .

$S_2 = \{(x, 5x, z); x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 5, 0) + z(0, 0, 1)\}$ . Portanto,  $G(S_1 \cup S_2) = \{(1, 2, 0), (0, 3, 1), (1, 5, 0), (0, 0, 1)\}$ .

Mas isto iria de encontro com a observação IV da dimensão de um espaço vetorial. Pois, a união de subespaços de  $\mathbb{R}^3$  ainda será um subespaço de  $\mathbb{R}^3$ .

Indicando que possui um vetor a mais e que deverá ser descartado apropriadamente. Para isto, ao retirar um determinado vetor, deve-se verificar que o conjunto continua linearmente independente.

Portanto,  $G(S_1 \cup S_2) = \{(1,2,0), (0,3,1), (1,5,0)\}$  e assim  $\dim(S_1 \cup S_2) = 3$ .

Para verificar os geradores do subespaço interseção, lembre que os vetores formam uma combinação. E assim,  $S_1 \cap S_2 = [(1,5,1)]$ , i.e,  $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$ .

Valendo então a relação (6), uma vez que a dimensão tanto de  $S_1$  como de  $S_2$  é igual a 2.

### 1.5.1. Exercícios de Fixação

*Neste quesito, você já sabe que existe um conjunto com número máximo de vetores que o torna L.I. e que gera todo o espaço vetorial. E tal conjunto é chamado de Base do Espaço Vetorial e a quantidade de vetores representa a dimensão do referido Espaço. Sendo assim, vamos praticar!*

**1.** Determine a base canônica dos seguintes Espaços Vetoriais e justifique o que está em parênteses.

- a)  $\mathbb{R}$  (Espaço dos Números Reais)
- b)  $\mathbb{R}^2$  (Espaço bidimensional)
- c)  $\mathbb{R}^3$  (Espaço tridimensional)
- c)  $\mathbb{R}^n$  (Espaço n - dimensional)

**2.** Determine uma base para os seguintes subespaços vetoriais, representando-os geometricamente, quando possível, a seguir:

- a)  $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = y\}$
- b)  $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - y + z = 0\}$
- c)  $S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; x = 2y \right\}$

## 1.6. Componentes de um vetor

Como vimos na seção anterior, podemos ter diferentes bases para um mesmo Espaço Vetorial, e assim, podemos ter diferentes maneiras de escrever um determinado vetor em relação à base.

**Definição: [Componentes de um vetor]** seja  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  uma base. Considere  $v \in V$ , então, podemos escrevê-lo em termo de  $B$ :

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (7)$$

Os números  $\alpha_i$  são chamados as componentes do vetor na base  $B$ .

**Notações:**  $v_B = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ou  $v_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$  (8)

**Exemplo 11:** Expresse o vetor  $v = (3, -5)$  em termos das bases  $B_1 = \{(1,2), (-1,5)\}$  e  $B_2 = \{(2, -3), (4, -1)\}$ .

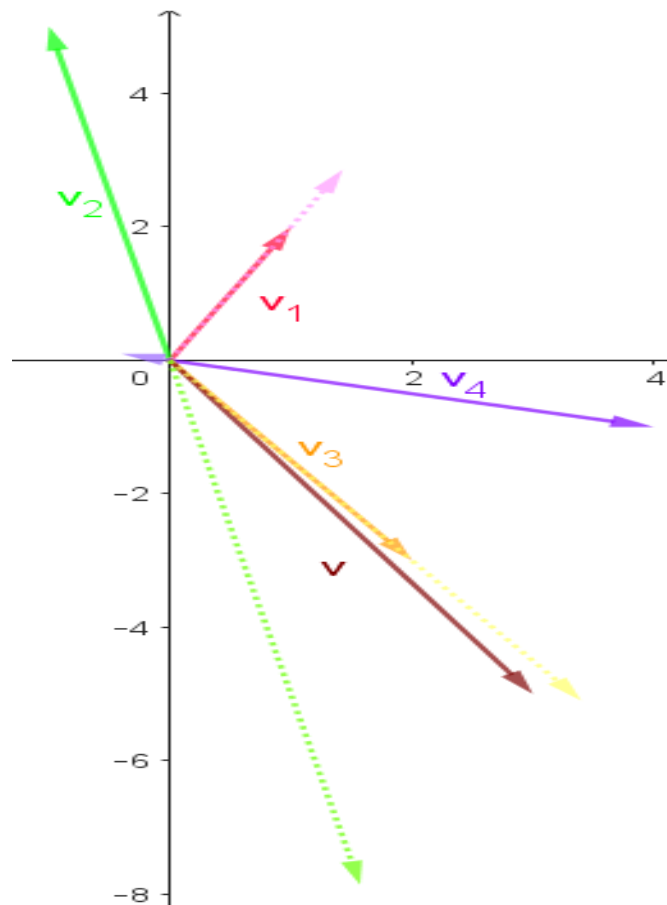
**Resolução:** Escrevendo a combinação e resolvendo os sistemas:

$$(3,5) = a_1(1,2) + a_2(-1,5) \rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = 3 \\ 2a_1 + 5a_2 = 5 \end{cases} \rightarrow v_{B_1} = \left(\frac{10}{7} \quad -\frac{11}{7}\right)$$

$$(3,5) = a_1(2, -3) + a_2(4, -1) \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 4a_2 = 3 \\ -3a_1 - a_2 = 5 \end{cases} \rightarrow v_{B_2} = (1,7 \quad -0,1)$$

Lembrando que esses são os ajustes para que os vetores sejam as bases do paralelogramo e o vetor  $v$  ser a diagonal maior.

**Figura 2.** Localização do vetor  $v$  expresso em termos de  $B_1 = \{v_1, v_2\}$  e de  $B_2 = \{v_3, v_4\}$



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

**Observação:** Na Figura 2 é possível identificar geometricamente que o vetor soma  $v$  pode ser representado como a diagonal do paralelogramo formado pelos vetores  $\frac{10}{7}v_1$  e  $-\frac{11}{7}v_2$ , assim como também pelos vetores  $1,7v_3$  e  $-0,1v_4$ .

### 1.6.1. Exercícios de Fixação

*Não perca o foco! Vamos praticar mais um pouco a escrita de um vetor em uma determinada base. Isto será muito necessário na seção de Matriz de uma Transformação Linear.*

1. Sendo as bases:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0), (0,1)\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{(2,1), (3, -1)\}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{(5,4), (3, -2)\}$$

Para cada uma das bases expressas, determine  $v = (8,3)$  na base:

a)  $\mathcal{B}_1$

b)  $\mathcal{B}_2$

c)  $\mathcal{B}_3$

## 1.7. Isomorfismos

*Nesta seção, pode-se definir isomorfismos entre Espaços Vetoriais em geral com o Espaço  $\mathbb{R}^n$ . E na maioria dos casos, daqui em diante todos os exemplos serão mais comumente explicitados por tais isomorfismos vetoriais. No capítulo sobre Transformações Lineares, se exibirá um aprimoramento da definição de Isomorfismo entre Espaços Vetoriais quaisquer.*

**Definição: [Isomorfismo]** seja  $V_1$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$  e  $V_2 = \mathbb{R}^n$ . Se  $\dim(V_1) = n$ , então dizemos que  $V_1$  é isomorfo a  $V_2$  se existir uma aplicação  $\psi: V_1 \rightarrow V_2$  tal que:

i)  $\psi$  seja bem definida;

ii)  $\psi$  seja biunívoca.

Notação:  $V_1 \cong \mathbb{R}^n$

**Exemplo 12:** São isomorfismos:

a)  $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{m \times n}$

**Resolução:** Fazendo a função  $\psi\left(\left[\begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1} & \cdots & m_{mn} \end{pmatrix}\right]\right) = (m_{11}, \dots, m_{1n}, \dots, m_{m1}, \dots, m_{mn})$ , note que a dimensão das Matrizes  $m \times n$  é igual a  $m \cdot n$ , o que coincide com a dimensão do  $\mathbb{R}^{m \times n}$ .

b)  $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$

**Resolução:** Fazendo a função  $\psi(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ . Note que a dimensão do espaço de polinômios  $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$  é igual a  $n + 1$ .

# CAPÍTULO 2

## ESPAÇOS VETORIAIS EUCLIDEANOS

Um espaço vetorial com suas operações triviais, de adição e multiplicação por um escalar, já tem condições de operar com os vetores, mas ainda precisamos ter uma métrica para calcularmos comprimento, ângulos e áreas. Assim, com uma função métrica dentro do espaço podemos ir mais além.

## 2.1. Produto Interno

**Definição: [Produto Interno]** seja  $V$  um espaço vetorial e  $\cdot: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  que opera com dois vetores  $u, v \in V$  e associa um número real, definido como segue:

$$u \cdot v = (x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n \in \mathbb{R} \quad (9)$$

onde se deve cumprir os seguintes axiomas:

P<sub>1</sub>) Comutatividade:

$$u \cdot v = v \cdot u$$

P<sub>2</sub>) Distributiva em relação à adição de vetores:

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

P<sub>3</sub>) Associativa em relação à multiplicação por escalar de vetores:

$$(\alpha u) \cdot v = u \cdot (\alpha v) = \alpha(u \cdot v)$$

P<sub>4</sub>) Não — Degenerescência:  $u \cdot u \geq 0$ . Temos  $u \cdot u = 0$ , se e somente se,  $u = 0$

**Observação 7:** Qualquer função que atenda aos quatro axiomas pode ser definida como um produto interno, sendo (9) chamado de produto interno usual. Um Espaço vetorial de dimensão finita com um produto interno chama-se *Espaço Vetorial Euclidiano*. Além disso, os espaços vetoriais são sobre o corpo dos números Reais,  $\mathbb{R}$ , e cuja dimensão é finita.

**Exemplo 13:** No espaço das Matrizes  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ , definimos o produto interno dado por

$$M_1 \cdot M_2 = \text{traço}(M_2^t M_1)$$

onde  $M_2^t$  é a transposta de  $M_2$ . Nestes termos, calcule o produto interno entre  $M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$  e  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ .

**Resolução:**

$$M_2 = \text{traço} \left( \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{traço} \left( \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right) = \text{traço} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} = -6 - 3 = -9$$

## 2.2. Módulo ou Norma ou Comprimento

**Definição: [Módulo ou Norma ou Comprimento de um vetor]** O Módulo ou Norma ou Comprimento de um vetor é definido a partir do produto interno dentro do espaço vetorial  $V$  por:

$$|v| = \sqrt{v \cdot v} \quad (10)$$

**Definição: [Propriedades do Módulo]** seja  $V$  um espaço vetorial.

- i) **[Não Degenerescência]**  $|v| \geq 0 \forall v \in V; |v| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ .
- ii) **[Positividade]**  $|\alpha v| = |\alpha| |v|$
- iii) **[Desigualdade de Cauchy-Swarz]**  $|u \cdot v| \leq |u| |v|$
- iv) **[Desigualdade Triangular]**  $|u + v| \leq |u| + |v|$

**Exemplo 14:** Considere em  $\mathbb{R}^2$ , o produto interno definido por  $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ , onde  $u = (x_1, y_1)$  e  $v = (x_2, y_2)$ . Calcule a norma do vetor  $(-1, 2)$ .

**Resolução:** Utilizando a equação (10) para calcular a norma do vetor, temos:

$$|(-1,2)| = \sqrt{(1,-2) \cdot (1,-2)}$$

Calculando o produto interno conforme o enunciado do problema:

$$\{[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [3 \quad 7] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -3 + 14 = 11$$

Logo,  $|(-1,2)| = \sqrt{11}$ .

**Observação 8:** Se fosse calculado a norma do vetor sendo utilizado o produto interno usual, a matriz seria a matriz identidade.

$$\{[-1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [-1 \quad 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1 + 4 = 5.$$

Importante sempre atentar para o produto interno que está sendo utilizado, pois a resposta pode mudar completamente.

### 2.2.1. Exercícios de Fixação

*Com a determinação de um produto interno em um Espaço Vetorial, pode-se calcular várias medidas, entre elas, o comprimento de vetores. Agora chegou a sua vez de testar alguns produtos internos diferentes num mesmo Espaço Vetorial!*

**1.** Sendo o vetor  $v = (2, -1, 1)$ , calcule o comprimento do vetor de acordo com cada produto interno dado.

a)  $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1y_1 + x_2y_2 + z_1z_2$  “Produto interno usual do  $\mathbb{R}^3$ ”

b)  $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = 3x_1x_2 - y_1y_2 + 2z_1z_2$

c)  $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$

### 2.3. Espaços Vetoriais Normados - EVN

Um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno, possibilita a criação do cálculo da Norma de um vetor, tornando assim, o espaço vetorial normado - EVN. Com isso, pode-se obter o cálculo de ângulos e definir subespaços ortogonais e até o complemento ortogonal de subespaços.

**Definição: [Ângulo entre Vetores]** Dados dois vetores não nulos,  $u$  e  $v$ , e  $\theta$  o ângulo formado entre eles, podemos calcular o ângulo expressamente através da Equação (8).

$$\cos \theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} \quad (11)$$

Ou seja,

$$\theta = \arccos \left( \frac{u \cdot v}{|u||v|} \right) \text{ com } 0 \leq \theta \leq \pi$$

**Observação 9:** Esta fórmula deduzida da Lei dos Cossenos. Caso necessite do ângulo entre  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , basta considerar no numerador da fração em (11) em módulo.

**Definição: [Normalização]** Um vetor  $v$  é dito normalizado se  $|v| = 1$ . Caso o vetor não seja normalizado, pode-se normalizar fazendo a operação de multiplicação por escalar, dado por:

$$u = \frac{1}{|v|} v \quad (12)$$

desde que  $v$  seja não nulo.

## 2.4. Condições de Ortogonalidade

### Definição: [Ortogonalidade]

- **Entre vetores:**

Dois vetores não nulos são ditos ortogonais quando o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ . Substituindo o ângulo na equação (11) e tendo-se que  $|u| > 0$  e  $|v| > 0$ , obtemos  $u \cdot v = 0$ .

### Notação: $u \perp v$

- **Entre um vetor e um Subespaço:**

Seja  $u \in V$  e  $S$  um subespaço vetorial de  $V$ . Dizemos que  $u$  é ortogonal a  $S$  se dado qualquer vetor  $v \in S$  for satisfeito  $u \perp v$ .

### Notação: $u \perp v$

- **Conjunto Ortogonal:**

Dado um conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ , onde  $V$  é um espaço vetorial euclidiano. Dizemos que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é ortogonal se  $v_i \perp v_j \forall i \neq j$ .

**Observação:** Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  constituir uma base para  $V$ , dizemos que o conjunto é uma *base ortogonal*.

- **Conjunto Ortonormal:**

Dado um conjunto  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ , onde  $V$  é um espaço vetorial euclidiano. Dizemos que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  é ortonormal se

$$\begin{cases} v_i \cdot v_j = 0, \forall i \neq j \\ v_i \cdot v_j = 1, \forall i = j \end{cases} \quad (12)$$

**Observação:** Se  $\{v_1, \dots, v_n\}$  constituir uma base para  $V$ , dizemos que o conjunto é uma *base ortonormal*.

- **Entre Subespaços Ortogonais entre si:**

Sendo  $S_1$  e  $S_2$  subespaços não triviais de um Espaço Vetorial Normado  $V$ , dizemos que  $S_1$  é ortogonal a  $S_2$ , se para qualquer vetor  $v \in S_1$  for ortogonal a  $S_2$ , e vice-versa.

**Notação:**  $S_1 \perp S_2$

- **Complemento Ortogonal:**

Considere  $V$  um EVN e  $S \subseteq V$  subespaço vetorial. Dizemos que o complemento ortogonal a  $S$  é:

$$S^\perp = \{v \in V; v \perp S\} \quad (13)$$

**Notação:**  $S^\perp$

**Exemplo 15:** Seja  $V = \mathbb{R}^3$  com produto interno usual, considere o subespaço  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y - 2z = 0\}$ . Encontre o  $S^\perp$ .

**Resolução:** Encontremos a base de  $S$ , primeiramente.  $S = \{(x, 2z, z); x, z \in \mathbb{R}\}$  e então  $G(S) = [(1,0,0), (0,2,1)]$ .

Logo se  $v \in S^\perp$ , então,  $v \perp (1,0,0)$  e ao mesmo tempo  $v \perp (0,2,1)$ .

Sendo  $v = (x, y, z)$ :

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (1,0,0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0,2,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

O sistema é satisfeito para  $x = 0$  e  $z + 2y = 0$ . Portanto,  $S^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0 \text{ e } z = -2y\}$ .

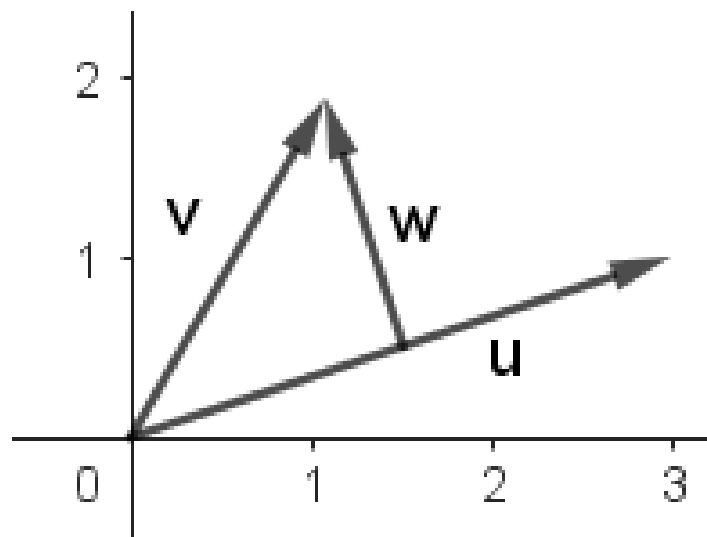
Outra maneira de solucionar o problema é usando o produto externo, que satisfaz a condição requerida e assim:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 2)$$

Portanto,  $S^\perp = [(0, -1, 2)]$ .

Mesmo não se tendo a base de um subespaço vetorial ortogonal, pode-se ortogonalizá-la pelo *Método de Ortogonalização de Gram-Schmidt* que consiste em tomar a projeção de um vetor sobre o outro como na Figura 3, onde  $u$  e  $v$  não são ortogonais entre si.

**Figura 3.** Obtenção de vetores ortogonais.



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

A obtenção de vetores ortogonais a partir dos vetores  $u$  e  $v$  vem:

Pela Lei do Paralelogramo, temos que o vetor  $w$  é exatamente  $v - \lambda u$ . Lembre-se que a multiplicação por escalar aumenta, diminui ou inverte o sentido do vetor.

Como os vetores  $w$  e  $u$  são ortogonais, em particular,  $w$  e  $\lambda u$  também, segue que:

$$\lambda u \cdot (v - \lambda u) = 0 \quad (14)$$

Logo, aplicando a propriedade distributiva do produto interno, obtemos

$$\lambda = \frac{u \cdot v}{u \cdot u}$$

E, assim, a nova base constituída de vetores ortogonais entre si, são:

$$u \text{ e } w = v - \left( \frac{u \cdot v}{u \cdot u} \right) u$$

### 2.4.1. Exercícios de Fixação

*Neste patamar você já conhece várias condições de ortogonalidade. Então é a hora de praticar!*

**1.** Determine o complemento ortogonal do subespaço vetorial  $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + 2z = 0\}$ , de acordo com o produto interno indicado.

a) em relação ao produto interno usual  $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ .

b) em relação ao produto interno  $(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = 2x_1x_2 - y_1y_2 + z_1z_2$ .

**2.** Determine uma base ortonormal do subespaço vetorial  $S = \{(x, y); x = 2y\}$  em relação ao produto interno usual.

## 2.5. Componentes de um vetor numa Base Ortogonal

Considere  $V$  um EVN e  $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  uma base ortogonal. Então se consideramos  $v \in V$ , pode-se escrevê-lo em termos da base  $B$ .

$$v = \sum_{i=1}^n a_i v_i, \text{ com } a_i \in \mathbb{R}$$

Ou ainda:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad (15)$$

Para descrever os escalares  $a_i$ , podemos utilizar a informação da base ser ortogonal,  $v_i \cdot v_j = 0, \forall i \neq j$ .

Assim para achar o escalar, por exemplo, basta fazer o produto interno da equação (11) com o vetor  $v_1$ .

Então temos:

$$v \cdot v_1 = a_1 v_1 \cdot v_1$$

O que acarreta:  $a_1 = \frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}$

Seguindo este mesmo procedimento, os escalares serão descritos pela fórmula de recorrência dada por:

$$a_i = \frac{v \cdot v_i}{v_i \cdot v_i}; i = 1, \dots, n \quad (16)$$

**Exemplo 16:** Considere a base ortogonal  $B = \{(1, -2, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  de  $\mathbb{R}^3$  em relação ao produto interno usual. Descreva as componentes matriciais do vetor  $v = (5, 3, 2)$ .

**Resolução:** Considerando os vetores  $v_1 = (1, -2, 1), v_2 = (-1, 0, 1)$  e  $v_3 = (1, 1, 1)$ . Utiliza-se a equação (16) para calcular os coeficientes:

$$a_1 = \frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} = \frac{5 - 6 + 2}{1 + 4 + 1} = \frac{1}{6}$$

$$a_2 = \frac{v \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} = \frac{-5 + 2}{1 + 0 + 1} = \frac{-3}{2}$$

$$a_3 = \frac{5 + 3 + 2}{1 + 1 + 1} = \frac{10}{3}$$

Logo,

$$v_B = \left( \frac{1}{6}, \frac{-3}{2}, \frac{10}{3} \right).$$

### 2.5.1. Exercícios de Fixação

*Percebeu como a condição de ortogonalidade facilita o cálculo das componentes de um vetor quando a base é ortogonal? Então, vamos exercitar e fixar essa nova maneira de calcular o vetor numa base ortogonal.*

1. Sendo  $B = \{(1, -2, 1), (-1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  uma base ortogonal, determine os seguintes vetores:

a)  $(5, 3, -2)_B$

b)  $(-1, 4, 6)_B$

c)  $(2, -1, 7)_B$

$y = b$   
 $5x + 2y = c$   
 $(3 \ - \ 1 \ 2 \ 5 \ | \ 8 \ 7)$   
 $M = \begin{pmatrix} M_{ij} \end{pmatrix}_{3 \times 3}$

$$F\left(0, \frac{p}{2}\right)$$

$$\dots a_{1n} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} a_{m1} \dots a_{mn}$$

$$a^2 b^2$$

$$(1, 3, 0)$$

$$\frac{5}{2} \neq$$

# CAPÍTULO 3

## TRANSFORMAÇÕES LINEARES

$$= (a_{ij})$$

$$\frac{1}{3} \vec{u}$$

$$a^2 b^2$$

$$\text{sen } \phi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{N}| |\vec{v}_r|}$$

*As transformações lineares podem ser aplicadas em diversos segmentos da Engenharia, principalmente as Transformações Lineares Planas e Espaciais, como a Rotação, Reflexão e Cisalhamento, podendo ser pensadas como o movimento de um braço mecânico na indústria de automação.*

### 3.1. Transformação Linear - TL

**Definição: [Transformação Linear]** sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais, onde  $\dim(V) \neq \dim(W)$ . Considere a aplicação  $T: V \rightarrow W$ , dizemos que  $T$  é uma transformação linear se cumprir as seguintes propriedades:

i)  $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V;$

ii)  $T(\lambda v) = \lambda T(v), \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } v \in V.$

**Observação 10:**  $V$  é chamado de Domínio da Transformação,  $D(T)$ , e  $W$  chamada de contradomínio da Transformação,  $CD(T)$ .

#### 3.1.1. Operador Linear - OL

**Definição: [Operador Linear]** Seja  $V$  um espaço vetorial, considere a aplicação  $T: V \rightarrow V$ , ou seja, uma Transformação Linear onde tanto o Domínio como o Contradomínio são iguais. Neste caso,  $T$  é um operador linear se cumprir as seguintes propriedades:

i)  $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V;$

ii)  $T(\lambda v) = \lambda T(v), \lambda \in \mathbb{R} \text{ e } v \in V.$

### 3.2. Núcleo e Imagem de uma TL

**Definição: [Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear]** Dada uma transformação linear  $T: V \rightarrow W$ , temos associados a cada um dos Espaços Vetoriais,  $V$  e  $W$ , respectivamente, os subespaços vetoriais, Núcleo ( $\mathbf{N(T)}$ ) e Imagem ( $\mathbf{Im(T)}$ ), definidos como a seguir:

$$\mathbf{N(T)} = \{v \in V; T(v) = 0\} \quad (17)$$

$$\mathbf{Im(T)} = \{w \in W; T(v) = w \forall v \in D(T)\} \quad (18)$$

**Observação 11:** As definições acima, dadas pelas equações (17) e (18), são facilmente demonstradas que são subespaços vetoriais e resultam em dois sistemas, homogêneo e outro genérico, respectivamente.

**Exemplo 17:** Considere a transformação linear dada por  $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + y - 2z)$ . Determine o núcleo e imagem.

Pela definição de Núcleo temos o seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema acima:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right]$$

Escalonando o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ L_2 + 2L_1 \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & 0 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Assim, o sistema é classificado como Possível e Indeterminado, com  $z = 5x$  e  $y = 7x$ . Portanto, o Núcleo é dado por:

$$\mathbf{N(T)} = [(1,7,5)]$$

Já para determinar a Imagem da Transformação temos que resolver o sistema genérico:

$$\begin{cases} 2x - y + z = a \\ 3x + y - 2z = b \end{cases}$$

Reescrevendo o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 3 & 1 & -2 & b \end{array} \right]$$

Escalonando o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & a \\ 3 & 1 & -2 & b \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ L_2 + 2L_1 \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -1 & a + b \\ 7 & -1 & 0 & b + 2a \end{array} \right]$$

Onde o conjunto Imagem é definido por:

$$Im(T) = \{(2x - y + z, 3x + y - 2z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Ou seja:  $G(Im(T)) = [(2,3), (-1,1), (1,-2)]$ . Porém, este conjunto não é linearmente independente e, por isso, devemos descartar um dos vetores e construir a base, por exemplo:

$$G(Im(T)) = [(-1,1), (1,-2)]$$

Com a execução do exemplo 17, pode-se perceber que existe uma condição para as dimensões dos espaços vetoriais:  $Dom(T)$ ,  $CD(T)$  e  $Im(T)$  e a seguir um resultado muito importante a este respeito, o qual é chamado de Teorema da Dimensão.

**Teorema: [Teorema da Dimensão]** seja  $T: V \rightarrow W$  uma TL e sendo  $V$  um EVN de dimensão finita. Então vale:

$$\dim(V) = \dim(N(T)) + \dim(Im(T)) \quad (19)$$

**Observação 12:** A equação (19) pode auxiliar em muitos exercícios onde é solicitado a dimensão.

### 3.2.1. Exercícios de Fixação

*As transformações lineares têm subespaços vetoriais muito importantes, entre eles, o Núcleo da Transformação  $N(T)$  e a Imagem da Transformação  $Im(T)$ . Vamos praticar!*

1. Determine para cada uma das Transformações os seguintes quesitos:

I - Identificar os espaços envolvidos na Transformação

II - Verificar se a Transformação é Linear

III - O núcleo da Transformação

IV - A imagem da Transformação

V - Verificar a validade do Teorema da Dimensão

a)  $T(x, y) = (x + y, 2x - y, x)$

b)  $T(x, y, z) = (2x - y + z, 3x + 2y - z)$

c)  $T(x, y, z, w) = (2x - y + z - w, 3x + y - z - 2w)$

d)  $T(x) = (x, 2x)$

### 3.3. Matriz de uma TL

*Um dos atributos mais fascinantes da Álgebra Linear é esse feito de interpretar por meio de uma matriz, uma Transformação Linear. Assim, podemos fazer aplicação na Engenharia, principalmente mais adiante, quando tratarmos dos Operadores Lineares, que retratarão algumas operações como rotação, cisalhamento, reflexão, que simulam movimentos robóticos.*

**Definição: [Matriz de uma TL]** Sejam  $T: V \rightarrow W$  uma TL,  $A$  e  $B$  bases de  $V$  e  $W$ , respectivamente, e as dimensões:  $\dim V = n$  e  $\dim W = m$ .

Então podemos associar a matriz  $[T]_B^A$  de ordem  $m \times n$ , da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde cada coluna corresponde a:

$$T(v_1)_B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}; \dots; T(v_n)_B = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

com  $A = \{v_1, \dots, v_n\}$  e  $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ .

Para especificar um caso particular de uma matriz de uma determinada TL, sem perda de generalidade, considere  $T: V \rightarrow W$ . Admita que a  $\dim(V) = 2$  e  $\dim(W) = 3$ .

### **Demonstração:**

Sabemos da seção 1.6, que podemos escrever um vetor na base e indicar as suas componentes.

Seja  $A = \{v_1, v_2\}$  uma base de  $V$  e  $B = \{w_1, w_2, w_3\}$  uma base de  $W$ . Desta maneira, um vetor  $v \in V$  pode ser escrito na base  $A$  e  $w \in W$  pode ser escrito na base  $B$ , como, respectivamente:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 \quad (20)$$

e

$$w = b_1 w_1 + b_2 w_2 + b_3 w_3 \quad (21)$$

Porém, aplicando a transformação  $T$  em  $v$ , da linearidade, obtemos:

$$T(v) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$$

Como  $T(v_1)$  e  $T(v_2)$  são pertencentes a  $W$ , podem se escrever na base  $B$ .

$$T(v) = a_1(c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3) + a_2(d_1 w_1 + d_2 w_2 + d_3 w_3)$$

Ou ainda:

$$w = T(v) = (a_1 c_1 + a_2 d_1) w_1 + (a_1 c_2 + a_2 d_2) w_2 + (a_1 c_3 + a_2 d_3) w_3 \quad (22)$$

Comparando as equações (17) e (18), temos:

$$\begin{cases} b_1 = a_1c_1 + a_2d_1 \\ b_2 = a_1c_2 + a_2d_2 \\ b_3 = a_1c_3 + a_2d_3 \end{cases}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Na escrita, conforme seção 1.6:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A [v]_A \quad (23)$$

Note que:

$$T(v_1)_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (24) \quad \text{e} \quad T(v_2)_B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

**Observação 13:** É importante sempre a ordem da matriz que será  $\dim(W) \times \dim(V)$  e após a montagem genérica da matriz, as colunas sempre serão  $T(v_i)_B$ , ordenadamente.

### 3.3.1. Matriz Canônica de uma TL

A determinação da Matriz canônica de uma Transformação Linear, vale para os Operadores Lineares.

Para efeito, considere  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $T(x, y) = (4x - y, 2x, 5y)$ . Considerando as bases canônicas  $A = \{v_1, v_2\} = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$  e  $B = \{w_1, w_2, w_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$ . Assim, sabe-se da seção 3.3 que a matriz de  $T$  neste caso tem ordem  $3 \times 2$ .

Montando a matriz genérica e levando-se em consideração que as colunas serão  $T(v_i)_B$ :

$$[T] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

onde

$$T(v_1)_B = \alpha_1 w_1 + \beta_1 w_2 + \gamma_1 w_3 \quad (26)$$

e

$$T(v_2)_B = \alpha_2 w_1 + \beta_2 w_2 + \gamma_2 w_3 \quad (27)$$

Substituindo os vetores e a imagem solicitada  $T(1,0)$  na equação (26)

$$(4,2,0) = \alpha_1(1,0,0) + \beta_1(0,1,0) + \gamma_1(0,0,1)$$

Obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 4 \\ \beta_1 = 2 \\ \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

Substituindo os vetores e a imagem solicitada  $T(0,1)$  na equação (27)

$$(-1,0,5) = \alpha_2(1,0,0) + \beta_2(0,0,1) + \gamma_2(0,0,1)$$

Obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_2 = -1 \\ \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = 5 \end{cases}$$

Logo a matriz canônica de  $T$  é:

$$[T] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

### Observação 14:

1) A matriz canônica é indicada por  $[T]$ , sem mencionar as bases que estão sendo utilizadas, já que são as bases canônicas.

2) A primeira coluna da matriz canônica é exatamente os coeficientes da variável  $x$ ; a segunda coluna da matriz canônica é exatamente os coeficientes da variável  $y$ ; e quantas forem as variáveis que são envolvidas na Lei da TL serão representadas as colunas.

### 3.3.2. Matriz de um OL

A matriz que irá representar um Operador Linear será de ordem quadrada, por se tratar de uma aplicação que envolve o mesmo Espaço Vetorial. Mas mesmo diante disso, podemos ter bases diferentes para o mesmo espaço e, assim, ter a matriz mudança de base.

#### 3.3.2.1. Mudança de Base

**Definição: [Matriz Mudança de Base de um OL]** Sejam  $T: V \rightarrow W$  um OL, com  $\dim V=2$  (Por hipótese) e  $A = \{v_1, v_2\}$  e  $B = \{w_1, w_2\}$  bases de  $V$ . Nessas condições,  $[T]_B^A$ .

Por um lado, temos que por ser base que:

$$(x, y) = \alpha v_1 + \beta v_2 \quad (28) \quad \text{e} \quad w = T(x, y) = \gamma w_1 + \eta w_2 \quad (29)$$

Porém, da linearidade de T aplicada na equação (28):

$$T(x, y) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) \quad (30)$$

Onde  $T(v_1)$  e  $T(v_2)$  pertencem ao contradomínio e se escrevem na base  $B$ :

$$T(v_1) = \gamma_1 w_1 + \eta_1 w_2 \quad (31) \quad \text{e} \quad T(v_2) = \gamma_2 w_1 + \eta_2 w_2 \quad (32)$$

Substituindo (31) e (32) em (29), tem-se:

$$T(x, y) = \alpha(\gamma_1 w_1 + \eta_1 w_2) + \beta(\gamma_2 w_1 + \eta_2 w_2)$$

ou ainda:

$$T(x, y) = (\alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2)w_1 + (\alpha\eta_1 + \beta\eta_2)w_2 \quad (33)$$

Comparando (26) e (22), chega-se à conclusão de que:

$$\begin{cases} \gamma = \alpha\gamma_1 + \beta\gamma_2 \\ \eta = \alpha\eta_1 + \beta\eta_2 \end{cases}$$

ou matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Utilizando a notação de um vetor escrito em uma determinada base, tem-se:

$$[T(v)]_B = [[T(v_1)]_B \quad [T(v_2)]_B][v]_A \quad (34)$$

### Observação 15:

\*) Em algumas literaturas, quando temos um operador, sua matriz mudança de base é denotada por  $[I]_B^A$ .

\*\*\*) Vale a seguinte igualdade:  $([I]_B^A)^{-1} = [I]_A^B$

**Exemplo 18:** Determine a matriz mudança de base da transformação  $T(x, y, z) = (4x - y + z, x - y + 3z)$ , da base A (Base canônica de  $\mathbb{R}^3$ ) para B (Base canônica de  $\mathbb{R}^2$ ).

**Resolução:** A matriz  $[T]_B^A$  terá ordem de  $2 \times 3$ , descrita por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Sendo  $A = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$  e  $B = \{w_1, w_2\} = \{(1,0), (0,1)\}$ , verifica-se pela observação anterior que as colunas da matriz (34) são  $T(v_i)_B$ .

$$T(v_1) = T(1,0,0) = (4,2) = 4w_1 + 2w_2 \Rightarrow [T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(v_2) = T(0,1,0) = (-1,-1) = -1w_1 - 1w_2 \Rightarrow [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T(v_3) = T(0,0,1) = (1,3) = 1w_1 + 3w_2 \Rightarrow [T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Portanto:  $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

Com a equação (34), através do conhecimento da matriz mudança de base, podemos fazer a escrita de um vetor na outra base, ou seja, passar de uma base para outra.

### 3.3.2.1.1. Exercícios de Fixação

*Vamos ver se você entendeu bem a ideia de representar matricialmente uma Transformação Linear. Ela facilita muito a representação e consegue a partir de operações matriciais identificar imagens de um vetor por uma Transformação Linear. Observe também que um determinado espaço admite mais de uma base, então para cada base associada se admitirá uma nova Matriz.*

1. Sendo a Transformação Linear dada por  $T(x, y) = (x, y, x - y)$ , em cada caso, determine:

a) A matriz  $[T]_B^A$ , onde  $A$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$  e  $B$  é a matriz canônica de  $\mathbb{R}^3$ .

b) A matriz  $[T]_D^C$ , onde  $C = \{(2,1), (3,-1)\}$  e  $D = \{(1,-1,2), (3,1,-1), (1,0,4)\}$

c) A matriz  $[T]_F^E$ , onde  $E = \{(1,-1), (2,0)\}$  e  $F = \{(3,4,-1), (2,1,0), (5,1,2)\}$

2. Seja o Operador linear dado por  $T(x, y) = (5x - y, 3x - 2y)$ , em cada caso, determine:

a)  $[T]$

b)  $[T]_B^A$ , onde  $A = \{(1,3), (2, -1)\}$  e  $B = \{(2,5), (-1,2)\}$

c)  $[T]_A^B$ , onde  $A = \{(1,3), (2, -1)\}$  e  $B = \{(2,5), (-1,2)\}$

d)  $[T]_A^A$ , onde  $A = \{(1,3), (2, -1)\}$

e)  $[T]_B^B$ , onde  $B = \{(2,5), (-1,2)\}$

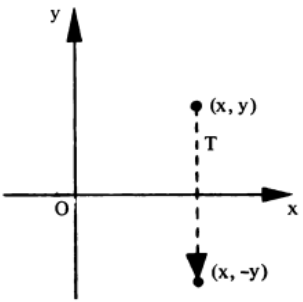
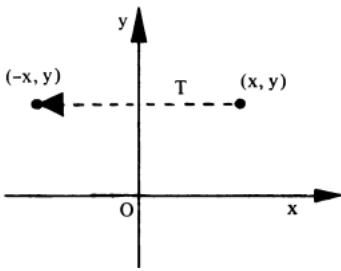
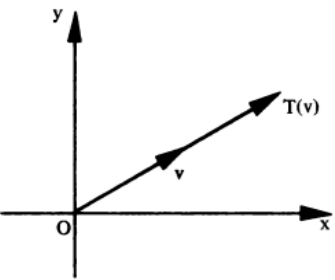
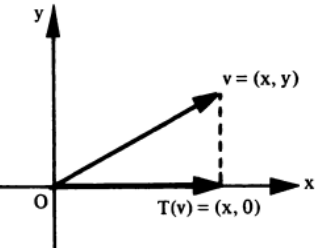
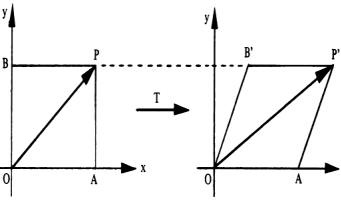
### 3.3.3. Tipos Especiais de Operadores Lineares

Nesta seção, alguns tipos de operadores importantes do  $\mathbb{R}^2$ , chamados de Operadores Lineares Planos e do  $\mathbb{R}^3$ , chamados de Operadores Lineares Espaciais, que serão destacados.

#### 3.3.3.1. Operadores Lineares Planos

No quadro 1, têm-se vários exemplos dos operadores lineares do  $\mathbb{R}^2$ , chamados de Operadores Lineares Planos.

**Quadro 1.** Principais Operadores Lineares Planos

Operadores Lineares Planos			
Operador	Lei do Operador	Matriz do Operador*	Locação e Situação no Plano
Reflexão em torno do eixo dos $x$	$T(x, y) = (x, -y)$	$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	
Reflexão em torno do eixo dos $y$	$T(x, y) = (-x, y)$	$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
Dilatação ou Contração	$T(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$ Casos: $\alpha > 1$ : Dilata $0 < \alpha < 1$ : Contrai $\alpha < 0$ : Muda o sentido	$[T] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$	
Projeção Ortogonal sobre o eixo $x$	$T(x, y) = (x, 0)$	$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
Cisalhamento	$T(x, y) = (x, y + \alpha x)$	$[T] = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	

Fonte: Steimbruch, 1987

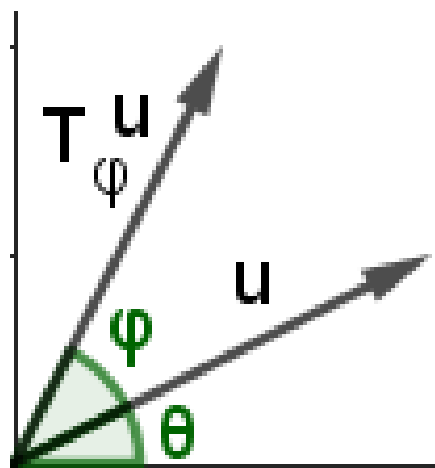
Outro Operador Linear Plano muito importante é o Operador de Rotação, que será detalhado a seguir:

### 3.3.3.1.1. Operador Linear Rotação 2D

A partir da locação e situação dos vetores envolvidos, de acordo com a Figura 4, podemos identificar o vetor  $u$  de acordo com o ângulo  $\theta$ , supondo que  $u$  seja unitário.

Note que  $|u|$  é a hipotenusa do triângulo e as projeções nos eixos coordenados são  $x$  e  $y$ .

**Figura 4.** Locação e Situação do vetor  $u$  e de seu vetor rotacionado a um ângulo  $\varphi$



Fonte: App GeoGebra Gráfica

O vetor  $u$  com coordenadas em função do ângulo  $\theta$  e de seu comprimento por:

$$u = (\cos\theta, \sin\theta) \quad (36)$$

Note também que  $T_\varphi u$  é o vetor após a rotação de um ângulo  $\varphi$  no sentido anti-horário. Assim a nova posição do vetor, depois de rotacionado, fica em termos do ângulo  $\theta + \varphi$  e de seu comprimento, que é unitário.

Assim, as novas coordenadas do vetor são dadas por:

$$T_{\varphi} u = (\cos(\theta + \varphi), \sin(\theta + \varphi))$$

e utilizando a fórmula do cosseno e seno do arco duplo, obtém-se:

$$T_{\varphi} u = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta) \quad (37)$$

ou organizando:

$$T_{\varphi} u = (\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi, \sin\varphi\cos\theta + \sin\theta\cos\varphi) \quad (38)$$

Expressando a equação (14) matricialmente:

$$T_{\varphi} u = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz rotação (rotação de um ângulo  $\theta$ ) é

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para se adaptar à Literatura, e sem perda de generalidade, temos a transformação linear de rotação (rotação de um ângulo  $\theta$ ) dada por:

$$[T_{\theta}(x, y)] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Ou ainda,

$$T_{\theta}(x, y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

### 3.3.3.2 Operadores Lineares Espaciais

No quadro 2, alguns operadores lineares do  $\mathbb{R}^3$ , conhecidos por Operadores Lineares Espaciais.

**Quadro 2.** Principais Operadores Lineares Espaciais

Operadores Lineares Espaciais			
Operadores	Lei do Operador	Matriz do Operador	Localização e Situação no Espaço
Reflexão em relação ao plano $xOy$	$T(x, y, z) = (x, y, -z)$	$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	
Rotação ao redor do eixo $z$ de um ângulo $\theta$	$T(x, y, z) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta, z)$	$[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	

**Fonte:** Steimbruch, 1987

**Observação 16:** Na rotação 3D, o eixo das cotas é identificado como um nível, onde o ponto final do vetor será identificado, assim nas duas primeiras coordenadas ocorre a real rotação. Ademais, pode-se obter rotações ao redor dos eixos das abscissas e eixo das ordenadas também.

**Exemplo 19:** Determine as coordenadas do vetor  $u = (2, -1)$  após sofrer uma rotação de  $90^\circ$  no sentido horário.

**Resolução:** Para determinar as novas coordenadas do ponto, temos que determinar a matriz de rotação de  $-90^\circ$  (sentido horário).

Aqui irá se fazer uma lembrança a respeito das funções pares e ímpares, no caso, a função seno é uma função ímpar, ou seja,  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$ . Já no caso da função cosseno, é uma função par, ou seja,  $\text{cos}(-x) = \text{cos}(x)$ . Desta forma, ficará mais fácil calcular a matriz de rotação.

$$[T]_{-\pi} = \begin{bmatrix} \cos(-\pi) & -\text{sen}(-\pi) \\ \text{sen}(-\pi) & \cos(-\pi) \end{bmatrix}$$

Levando-se em consideração as funções pares e ímpares, tem-se:

$$[T]_{-\pi} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \text{sen}(\pi) \\ -\text{sen}(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix}$$

Assim:

$$[T]_{-\pi} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Daí:

$$[T_{-\pi}(2, -1)] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Graficamente:

**Figura 5.** Localização e situação do vetor e seu vetor rotação



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

**Exemplo 20:** Encontre o vetor  $(1, 1, 1)$  após uma rotação de  $\frac{\pi}{3}$  em torno do eixo das ordenadas.

**Resolução:** Neste caso, a matriz de rotação não irá sofrer a influência em torno dos coeficientes de  $y$ , logo no eixo  $y$  ficará as coordenadas do vetor canônico  $j$ . Já nas direções de  $x$  e de  $z$ , terá a influência do giro do ângulo de  $\theta$ . Assim, a matriz em questão será representada por:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Substituindo o ângulo de  $\frac{\pi}{3}$ , tem-se:

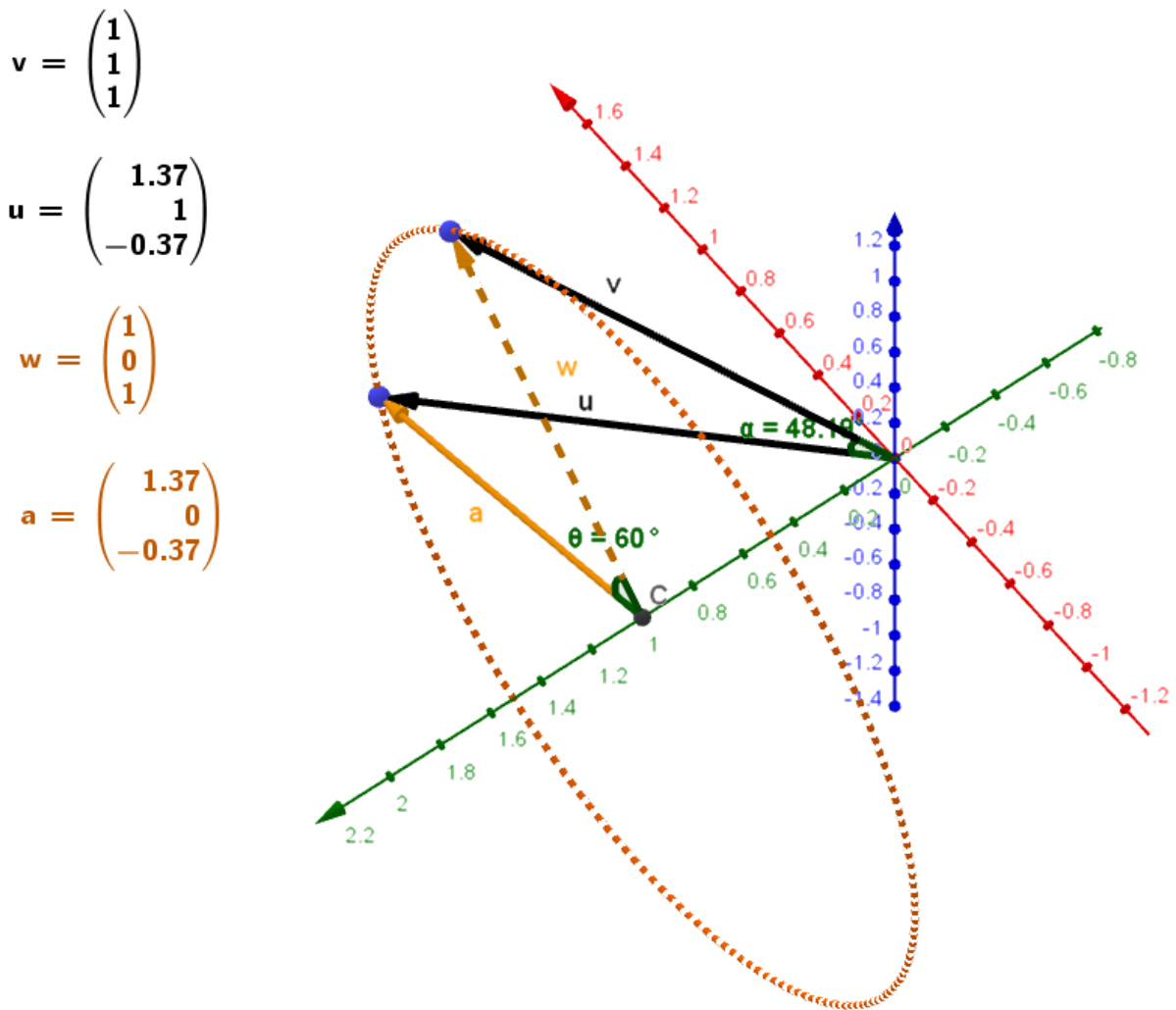
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Fazendo o cálculo do novo vetor rotacionado, que pode ser observado na Figura 6:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \\ 1 \\ \frac{-\sqrt{3} + 1}{2} \end{bmatrix}$$

Localizando os vetores no espaço 3D, conforme Figura 6, pode-se claramente observar que o Ângulo entre os vetores  $v = (1,1,1)$  e  $T(v) = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}, 1, \frac{-\sqrt{3} + 1}{2}\right)$  é de  $48.19^\circ$ , mas o ângulo de  $60^\circ$  é observado em relação ao ângulo central.

**Figura 6.** Rotação 3D em torno do eixo das ordenadas. Eixos - XYZ:RGB



Fonte: App GeoGebra Gráfica

### 3.3.3.3. Exercícios de Fixação

Os Operadores Lineares Planos e Espaciais são muito importantes e são utilizados na Engenharia com muita frequência, em plantas baixas, em Processamento Digital de Imagens, na Medicina para identificar células cancerígenas, em lançamento de trajetórias de Foguetes e Sondas Espaciais e muitos outros segmentos. Que tal entender um pouco mais a respeito de tais operadores?

1. Determine a imagem do vetor  $v = (4, -1)$  após uma rotação anti-horária de  $\frac{\pi}{6}$  radianos. Plote ambos vetores no Plano 2D.

2. Determine a imagem do vetor  $v = (3, 2, 5)$  após uma rotação horária de  $\pi/2$  radianos. Plote ambos vetores no Plano 3D.

### 3.3.4 Operadores Ortogonais

Seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $T$  é ortogonal se preserva o módulo de cada vetor pela aplicação, isto é,  $|T(v)| = |v|, \forall v \in V$ .

**Exemplo 21:** O operador de rotação  $T(x, y) = (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)$  é ortogonal em relação ao produto interno usual.

**Resolução:**  $|T(x, y)| = |(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta)|$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2} \\ &= \sqrt{x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta + x^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta} \\ &= \sqrt{x^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + y^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \sqrt{x^2 + y^2} = |(x, y)| \end{aligned}$$

### 3.3.5 Operador Simétrico ou Autoadjunto

**Definição: [Operador Simétrico]** um operador é simétrico quando a matriz que o representa numa base ortonormal é simétrica, isto é,  $[T]^t = [T]$ .

**Propriedade:** Seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Dizemos que  $T$  é simétrico se vale:

$$T(u) \cdot v = u \cdot T(v), \forall u, v \in V$$

### **Demonstração:**

Utilizando a linguagem matricial do operador, temos:

$$\begin{aligned} [T(u) \cdot v] &= [T(u)]^t [v] = [[T][u]]^t [v] = [u]^t [T]^t [v] = [u]^t [T][v] \\ &= [u]^t [T(v)] = [u \cdot T(v)] \end{aligned}$$

**Observação 17:** Uma consequência de Operador Ortogonal representado numa base ortonormal é que sua matriz seja ortogonal, isto é,  $[T]^{-1} = [T]^t$ .

### **3.3.6. Operador Invertível**

**Definição: [Operador Invertível]** sendo  $T$  um operador linear, sabemos que a matriz que o representa é quadrada. Logo se sua matriz for invertível, então dizemos que o Operador é invertível.

**Definição: [Propriedades de Operador]** seja  $T$  um operador. Então valem as seguintes propriedades:

- 1) Se  $T$  é invertível, sendo  $T^{-1}$  o operador inverso:  $T \circ T^{-1} = I$ . ( $I$  é o Operador Identidade)
- 2)  $T$  é invertível, então  $N(T) = 0$ .
- 3) Se  $T$  é invertível, então  $T$  leva base em base.
- 4) Se  $T$  é invertível e  $B$  é uma base de  $T$ , vale:  $[T^{-1}]_B = ([T]_B)^{-1}$ .

### **3.4. Determinação de uma TL**

A seguir alguns casos em que podemos saber a Lei da Transformação:

**Quadro 3.** Situações de determinação da Lei da Transformação

Tipo	Descrição
Caso 1	Diante das propriedades de uma Transformação Linear e da ciência de imagens de elementos específicos, como por exemplo, dos vetores que compõem o Espaço Vetorial de saída da TL, fica bem rápido e simples achar a Lei da TL.
Caso 2	Se for dado a Matriz Mudança de base, sabendo-se os vetores que compõem cada uma das respectivas bases, do Domínio e do Contra-Domínio da TL.
Caso 3	Em caso de Operadores Lineares, através do cálculo da Matriz Inversa, pode-se determinar a Lei do Operador Invertível.
Caso 4	Mais adiante (Capítulo 4) Sabendo a imagem de autovetores (que formam uma base para o Domínio) e usando a linearidade da Transformação.

**Fonte:** Steimbruch, 1987

**Exemplo 22:** Sendo  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  linear e sabendo que  $T(1, -1) = (3, 2, -1)$  e  $T(0, 1) = (2, -1, 1)$ , determine a lei de  $T$ .

**(Caso 1)**

**Resolução:** Neste caso, tem-se que verificar se os vetores  $v_1 = (1, -1)$  e  $v_2 = (0, 1)$  é uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Assim, uma maneira mais simples, uma vez que se sabe que a dimensão de  $\mathbb{R}^2$  é igual a 2, e temos apenas 2 vetores no conjunto, basta verificar se o determinante formado por suas coordenadas é diferente de zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Com a condição de base do conjunto  $A = \{v_1, v_2\}$ , podemos verificar a condição de gerador do espaço, dado por:

$$(x, y) = \alpha v_1 + \beta v_2 \quad (39)$$

O qual gera o sistema:

$$\begin{cases} \alpha = x \\ -\alpha + \beta = y \end{cases} \quad (40)$$

O sistema é possível e determinado, com solução:  $\alpha = x$  e  $\beta = x + y$

Usando a linearidade de T na equação (34) e substituindo os escalares:

$$T(x, y) = xT(1, -1) + (x + y)T(0, 1)$$

Donde resulta:

$$T(x, y) = x(3, 2, -1) + (x + y)(2, -1, 1) = (5x + 2y, x - y, y)$$

**Observação 17:** Como uma verificação, mostre que a Lei vale para os vetores  $v_1$  e  $v_2$  dados no Exemplo 22. E assim, pode-se constatar a imagem de qualquer vetor!

**Exemplo 23:** Sabendo que  $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  é a matriz mudança de base de  $A = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, -2, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)\}$  para  $B = \{w_1, w_2\} = \{(2, 1), (1, 3)\}$ . Determine a Lei de T.

**(Caso 2)**

**Resolução:** Primeiramente, deve-se destacar que a ordem da matriz  $[T]_B^A$  é  $2 \times 3$ , o que significa que a transformação é  $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Segundo, de acordo com as equações (19) e (20) da seção 3.3, temos:

$$T(v_1)_B = 2 w_1 + (-1)w_2 = 2(2, 1) + (-1)(1, 3) = (3, -1)$$

$$T(v_2)_B = 1 w_1 + 1w_2 = 1(2, 1) + (-1)(1, 3) = (1, -2)$$

$$T(v_3)_B = 1 w_1 + 0 w_2 = 1 (2, 1) + 0 (1, 3) = (2, 1)$$

Usando o fato de  $A$  ser base do  $\mathbb{R}^3$ , pode-se escrever:

$$(x, y, z) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 \quad (41)$$

Descrevendo o sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x \\ -2\alpha - \beta + \gamma = y \\ \alpha + \beta = z \end{cases}$$

Ou matricialmente

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x \\ -2 & -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ L_2 + 2L_1 \\ \square \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x - z \\ 0 & 1 & 3 & y + 2x \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \right] \begin{array}{l} \square \\ L_2 - 3L_1 \\ \square \end{array} \rightarrow \\ \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x - z \\ 0 & 1 & 0 & y - x + 3z \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array} \right] \begin{array}{l} \square \\ \square \\ L_3 - L_2 \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x - z \\ 0 & 1 & 0 & y - x + 3z \\ 1 & 0 & 0 & -y + x - 2z \end{array} \right] \end{aligned}$$

Logo, substituindo os coeficientes são:  $\alpha = x - y - 2z$ ;  $\beta = y - x + 3z$ ;  $\gamma = x - z$  na equação (36) e a linearidade de  $T$ :

$$T(x, y, z) = (x - y - 2z)T(1, -2, 1) + (y - x + 3z)T(1, -1, 1) + (x - z)T(1, 1, 0)$$

Assim:

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x - y - 2z)(3, -1) + (y - x + 3z)(1, -2) + (x - z)(2, 1) = \\ &= (3x - 3y - 6z + y - x + 3z + 2x - 2z, -x + y + 2z - 2y + 2x - 6z + x - z) = \\ &= T(x, y, z) = (4x - 2y - 5z, 2x - y - 5z). \end{aligned}$$

**Observação 18:** Analogamente à observação anterior, pode-se testar se as imagens de  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$  estão coincidindo com suas respectivas imagens dadas no enunciado do problema.

**Exemplo 24:** Seja  $T$  um operador invertível do  $\mathbb{R}^2$  definido por  $T(1,1) = (3, -2)$  e  $T(0,1) = (5,0)$ . Nessas condições, a lei de  $T^{-1}$  é?

**(Caso 3)**

**Resolução:** De acordo com as hipóteses, os conjuntos  $A = \{(1, 1), (0,1)\}$  e  $B = \{(3, -2), (5,0)\}$  são bases de  $\mathbb{R}^2$ . Logo o operador inverso está bem definido.

Então pela propriedade O2, temos:

$$T^{-1}(3, -2) = (1,1) \text{ e } T^{-1}(5, 0) = (0,1)$$

Como  $B$  é base, podemos gerar qualquer vetor do  $\mathbb{R}^2$ , tendo:

$$(x, y) = \alpha(3, -2) + \beta(5,0) \quad (42)$$

Resultando no sistema:  $\begin{cases} 3\alpha + 5\beta = x \\ -2\alpha = y \end{cases}$ , com resposta  $\alpha = -\frac{y}{2}$  e

$$\beta = \frac{x - 3\left(-\frac{y}{2}\right)}{5} = \frac{2x + 3y}{10}.$$

Aplicando  $T^{-1}$  na equação (24) e usando a linearidade de  $T^{-1}$ :

$$T^{-1}(x, y) = \frac{-y}{2} T^{-1}(3, -2) + \left(\frac{2x + 3y}{10}\right) T^{-1}(5,0) =$$

$$\frac{-y}{2} (1,1) + \left(\frac{2x + 3y}{10}\right) (0,1) = \left(\frac{-y}{2}, \frac{-y}{2} + \frac{2x + 3y}{10}\right) =$$

$$\left(\frac{-y}{2}, \frac{2x - 2y}{10}\right) = \left(\frac{-y}{2}, \frac{x - y}{5}\right).$$

**Observação 19:** Novamente usando o Teste com os vetores sob os quais a Transformação Inversa está agindo, pode-se verificar suas respectivas imagens utilizando a Lei de  $T^{-1}$ .

O exemplo a seguir mostra que se tiver a matriz mudança de base e apenas uma das bases, pode-se encontrar a outra base. Este resolvido através do operador inverso.

**Exemplo 25:** Sabendo que  $[I]_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$  e  $B = \{(3,5), (1,2)\}$ . Nessas condições, determine  $A$ .

**Resolução:** Como o exercício pede a determinação da base  $A$ , se for feita a transcrição dos elementos das colunas de acordo com a seção 3.3, teremos  $T(v_1)_B$  e  $T(v_2)_B$ , sendo  $A = \{v_1, v_2\}$ , onde  $v_1 = (x_1, y_1)$  e  $v_2 = (x_2, y_2)$ , o qual teríamos mais trabalho para identificar os vetores da base  $A$ .

**Observação 15\*\*:** temos que  $([I]_B^A)^{-1} = [I]_A^B$ .

Calculando a inversa de  $[I]_B^A$  pelo método da Adjunta:

$\det \left( \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -11 \end{bmatrix} \right) = 11 - 16 = -5 \neq 0$ . Logo, o Operador é Invertível.

$$[I]_A^B = \frac{1}{\det([I]_B^A)} \text{Adj}[I]_B^A = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -11 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Portanto, identificando  $B = \{w_1, w_2\}$ :

$$(3,5) = w_1 = T(w_1)_A = \frac{11}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2$$

$$(1,2) = w_2 = T(w_2)_A = \frac{4}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2$$

Reorganizando cada um dos sistemas envolvendo as mesmas variáveis:

$$\begin{cases} \frac{11}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 = 3 & (43) \\ \frac{4}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 = 1 & (44) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$(43) - 4 \cdot (44): -x_1 = -1. \text{ Assim, } x_1 = 1.$$

Substituindo o valor de  $x_1$  em (43):  $x_2 = \frac{15 - 11}{4} = 1$

De maneira análoga, tem-se o segundo sistema:

$$\begin{cases} \frac{11}{5}y_1 + \frac{4}{5}y_2 = 5 & (45) \\ \frac{4}{5}y_1 + \frac{1}{5}y_2 = 2 & (46) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

(45) - 4 \* (46):  $-y_1 = -3$ . Assim,  $y_1 = 3$ .

Substituindo o valor de  $y_1$  em (26):  $y_2 = \frac{25 - 33}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ .

E finalmente tem-se a base  $A = \{(1,3), (1, -2)\}$ .

### 3.5. Operações entre TL's

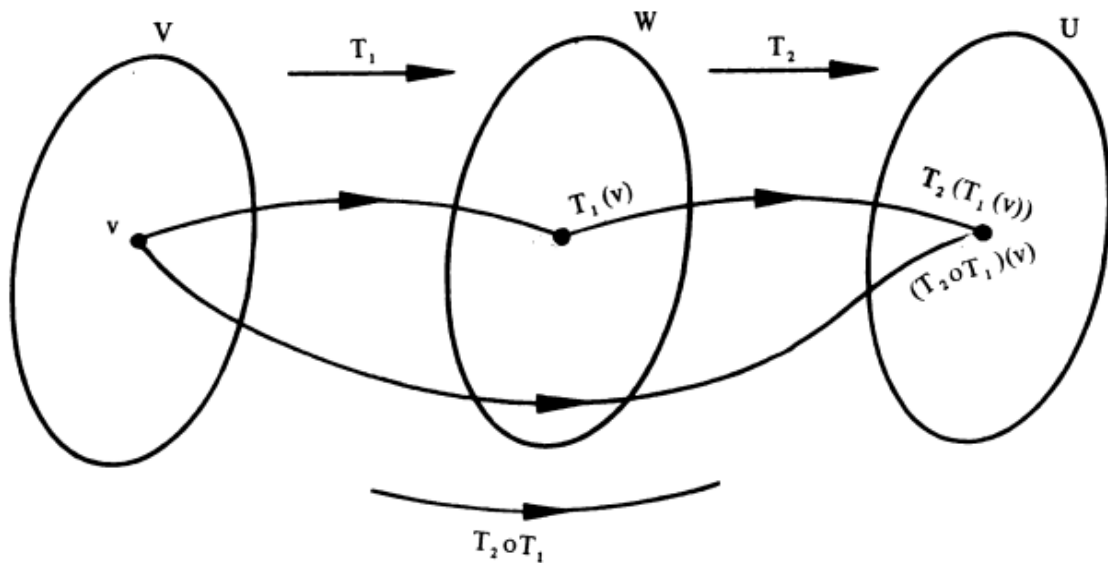
Sejam  $T_1: V \rightarrow W$  e  $T_2: W \rightarrow U$  transformações lineares e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , são válidas as seguintes operações:

**Quadro 4.** Operações entre Transformações Lineares

Operação	Notação	Lei	Operação Matricial
Adição	$T_1 + T_2$	$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v)$	$[T_1 + T_2]_B^A = [T_1]_B^A + [T_2]_B^A$
Subtração	$T_1 - T_2$	$(T_1 - T_2)(v) = T_1(v) - T_2(v)$	$[T_1 - T_2]_B^A = [T_1]_B^A - [T_2]_B^A$
Multiplicação por escalar	$\alpha T_1$	$(\alpha T_1)(v) = \alpha T(v)$	$[\alpha T_1]_B^A = \alpha [T_1]_B^A$
Composição	$T_2 \circ T_1$	$(T_2 \circ T_1)(v) = T_2(T_1(v))$	$[T_2 \circ T_1]_C^A = [T_2]_C^B [T_1]_B^A$ <i>A, B, C bases de V, W, U respectivamente</i>

**Fonte:** Steimbruch, 1987

**Figura 7.** Representação através de Diagramas de Venn da Composição



**Fonte:** Steimbruch, 1987

A fim de exemplificar as operações entre Transformações Lineares, em particular Operadores Lineares, será trabalhado com os Operadores Planos.

**Exemplo 26:** No plano, uma contração de  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  seguida de uma rotação anti-horária de  $45^\circ$ . Encontre tal aplicação que representa essa transformação no plano.

**Resolução:** Primeiramente, deve-se identificar as matrizes que representam tais transformações, conforme Quadro 1.

- A matriz de contração:

$$D_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Segundo, compor as transformações, vide Quadro 4.

- A matriz de rotação no sentido anti-horário com ângulo de  $45^\circ$  será:

$$R_{45} = \begin{bmatrix} \cos(45^\circ) & -\text{sen}(45^\circ) \\ \text{sen}(45^\circ) & \cos(45^\circ) \end{bmatrix}$$

$$R_{45} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

- Segundo, fazer a composição de Operadores:

$$[T] = R_{45^\circ} C_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- Por fim, escrever a lei do operador linear:  $T(x, y) = \left( \frac{x - y}{2}, \frac{x + y}{2} \right)$ .

### 3.5.1. Exercícios de Fixação

*As transformações e operadores lineares, como aplicações, podem ser descobertas a partir do conhecimento das imagens atuando sobre a base do Domínio da Transformação  $D(T)$ . Assim, você pode achar a Lei da Aplicação e, com isso, determinar a imagem de qualquer vetor que se queira.*

1. Descubra a Lei da Transformação/Operador e faça o que se pede, em cada caso:

a) Sabendo que  $T(1, -1) = (4, 3, 2)$  e  $T(0, 2) = (3, 1, -2)$ . Nessas condições,  $T(5, 3)$  é?

b) Sabendo que  $T$  é invertível e que  $T(4, 1) = (9, 2)$  e  $T(-1, 3) = (8, 5)$ . Nessas condições  $T^{-1}(1, 4)$  é?

c) Tendo a Matriz Mudança de base, de  $A = \{(1, -1, 2), (3, 1, 4), (2, -1, 5)\}$  para  $B = \{(1, -1), (2, 3)\}$ , igual a  $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ . Nessas condições, determine a imagem de  $v = (4, 6, 7)$ .

# CAPÍTULO 4

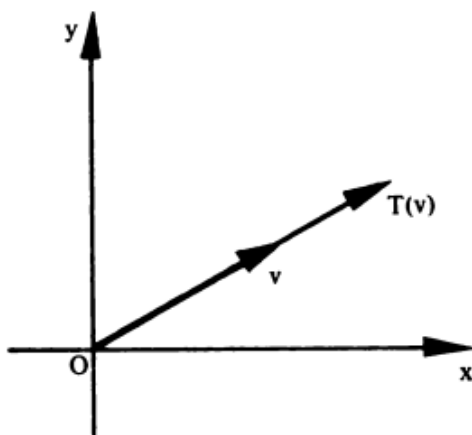
## DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES

*Essa ferramenta de diagonalizar operadores é bem interessante e pode-se aplicar esse estudo para entender matricialmente uma cônica. Dentre os operadores, alguns irão se destacar por ter maneiras mais rápidas de ser diagonalizado, levando-se em consideração alguns tipos de matrizes.*

## 4.1. Autovalor e Autovetor

Com todas as características de um Operador Linear, vistas no capítulo anterior, é bem comum se perguntar sobre algumas propriedades que alguns vetores têm de depender somente deles mesmos. Ou seja, a imagem de um autovetor será um múltiplo dele mesmo, como mostrado na Figura 8. A seguir, a definição de um autovetor associado a um autovalor.

**Figura 8.** Visualização de um autovetor



**Fonte:** Steimbruch, 1987

**Definição: [Autovalor e Autovetor]** Dado um operador linear, dizemos que  $v \in D(T)$  com  $v \neq 0$  é um autovetor se  $T(v) = \lambda v$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , e  $\lambda$  é o autovalor associado ao autovetor  $v$ .

**Observação 20:** Pela nomenclatura de auto, já dá a ideia de que só depende do próprio vetor. Em algumas literaturas, chama-se  $v$  um vetor próprio de  $T$  e  $\lambda$  um valor próprio associado a  $v$ .

## 4.2. Determinação dos Autovalores e Autovetores

Dado um operador linear sobre o corpo dos Reais  $\mathbb{R}$ , será que se pode determinar todos os autovetores que ele possui? E a resposta é sim. Veja a seguir esse algoritmo para a determinação de todos os autovetores existentes de um Operador Linear.

Decorre da definição de autovetor e autovalor que vale:

$$T(v) = \lambda v \text{ ou ainda } T(v) - \lambda v = 0 \quad (47)$$

Associando as matrizes na equação (42):

$$[T][v] - \lambda[I][v] = 0$$

$$[T - \lambda I][v] = 0 \quad (48) \text{ Determinação dos autovetores}$$

Como  $v \neq 0$ , e o sistema homogêneo em (43) deve ser SPI (Sistema Possível e Indeterminado - admitindo infinitas soluções), então

$$\det(T - \lambda I) = 0 \quad (49) \text{ Determinação dos autovalores}$$

A equação (44) também é conhecida como Equação característica do Operador e resulta num polinômio característico.

Para cada um dos autovalores encontrados da solução de (49), será substituído na equação (48) para a determinação dos autovetores associados.

**Exemplo 27:** Sendo o operador do  $\mathbb{R}^2$  dado por  $T(x, y) = (x + 3y, -x + 5y)$ . Encontre todos os autovalores e autovetores associados.

**Resolução:** Primeiramente, tem-se que determinar a matriz canônica do operador:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

O próximo passo é descrever, conforme a equação (49),  $\det(T - \lambda I) = 0$ .

$$T - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\det(T - \lambda I) = (1 - \lambda)(5 - \lambda) + 3 = 0$$

Resultando no polinômio característico:  $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$

Tendo os autovalores  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 4$ .

Agora para cada um autovalor, tem-se os autovetores associados. Para isto, usa-se a equação (48):

• Para  $\lambda_1 = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 - 2 & 3 \\ -1 & 5 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resultando no sistema  $2 \times 2$ :

$$\begin{cases} -x_1 + 3y_1 = 0 \\ -x_1 + 3y_1 = 0 \end{cases}$$

Em geral, o sistema resultante para o cálculo de autovetores associados recai num sistema no qual as linhas se repetem, exatamente o que acontece com o sistema acima.

Para a resolução do sistema, basta resolver uma linha do sistema e chega-se no resultado  $x_1 = 3y_1$ . Logo, o vetor  $v_1 = (x_1, y_1)$ , uma vez que  $x_1 = 3y_1$ , se torna  $v_1 = (3y_1, y_1)$ , ou seja,  $v_1 = [(3,1)]$ .

Uma nota importante é que todos os múltiplos do vetor  $(3,1)$  geram uma classe de vetores que é autovetor de  $T$ .

• Para  $\lambda_2 = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resultando no sistema  $2 \times 2$ :

$$\begin{cases} -3x_2 + 3y_2 = 0 \\ -x_2 + y_2 = 0 \end{cases}$$

Novamente, como mencionado acima, o sistema se resume em apenas uma linha, visto que uma linha é múltipla da outra. Temos a resposta do sistema,  $x_2 = y_2$ . Assim o autovetor  $v_2 = (x_2, y_2)$ , sendo  $x_2 = y_2$ . Logo  $v_2 = (x_2, x_2)$ , ou seja,  $v_2 = [(1,1)]$ .

### 4.3. Propriedades dos Autovalores e Autovetores

Seja  $v$  um autovetor de  $T: V \rightarrow V$ . Então, as seguintes propriedades são válidas:

i) Se  $v$  é autovetor associado a  $\lambda$ , então  $\alpha v$  também é autovetor associado ao mesmo  $\lambda$ .

ii) Se  $v$  é um autovetor associado a  $\lambda$ , então  $S_\lambda$ , que é o conjunto de todos os autovetores associados a  $\lambda$ , é um espaço vetorial de  $V$ .

iii) Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico, portanto os mesmos autovalores.

**Observação:** Matrizes semelhantes são aquelas que podem ser conjugadas pela matriz mudança de base. Por exemplo: Se  $A$  e  $B$  são semelhantes então  $[T]_A = M^{-1}[T]_B M$ .

### 4.3.1. Exercícios de Fixação

*Melhor do que ficar testando os vetores para saber quais são os autovetores é aplicar o algoritmo para determinar todos os autovetores associados a autovalores, conhecido como Polinômio Característico. Então, vamos praticar!*

1. Determine todos os autovetores dos Operadores Lineares abaixo:

a)  $T(x, y, z) = (5x - 3y + 2z, 4x - y + z, 2y - 4z)$

b)  $T(x, y) = (2x - 3y, 5x - y)$

c)  $T(x, y) = (4x - y, 3x - 7y)$

2. Sabendo que o operador linear tem o autovetor  $(1,3)$  associado ao autovalor 5 e o autovetor  $(-1,2)$  associado ao autovalor 3. Nessas condições, determine:

a)  $T(x, y)$

b) o vetor cuja imagem é  $(1,8)$

### 4.4. Diagonalização de Operadores

Ao se calcular todos os autovetores de um operador linear, consegue-se, entre outras palavras, uma base formada por autovetores, com a propriedade única de diagonalizar o Operador em termos de seus autovalores associados.

**Teorema:** Seja  $T: V \rightarrow V$  um operador linear, com  $\dim V = n$ . Se  $T$  possui  $n$  autovalores distintos, o conjunto de autovetores associados respectivamente,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , formarão uma um conjunto linearmente independente, consequentemente uma base para  $V$ .

### **Demonstração:**

A demonstração se dará em um caso particular, mas que pode ser facilmente estendido. Suponha que existam 2 autovalores distintos, a saber,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  associados aos autovetores  $v_1$  e  $v_2$ , respectivamente. Isto significa que:  $T(v_i) = \lambda_i v_i, i = 1, 2$ .

Para mostrar que  $\{v_1, v_2\}$  é L.I., faça a combinação

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i v_i = 0 \quad (51)$$

e deverá ser mostrado que os escalares  $\alpha_i = 0$ .

Mas usaremos a linearidade de  $T$  a fim de usar as hipóteses:

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i T(v_i) = 0$$

Ou ainda:

$$\sum_{i=1}^2 \alpha_i \lambda_i v_i = 0 \quad (52)$$

Multiplicando (51) por  $\lambda_1$  e subtraindo-se de (52):

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)v_2 = 0$$

Uma vez que  $v_2$  é um autovetor, naturalmente é não nulo, ou a outra possibilidade de  $\lambda_1 = \lambda_2$  o que é um absurdo, logo resta que  $\alpha_2 = 0$ .

Procedendo de maneira análoga, iremos ter  $\alpha_1 = 0$ .

**Definição: [Diagonalização de Operadores]** dizemos que  $T: V \rightarrow V$  é diagonalizável, se existem uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}TP$  é diagonal.

**Definição: [Determinação da base que diagonaliza Operadores]** Dado um operador  $T: V \rightarrow V$  que admite  $n$  autovalores distintos, associados a,  $\nu_1, \dots, \nu_n$ , então, a base  $P = \{\nu_1, \dots, \nu_n\}$  diagonaliza o operador  $T$ . Uma vez que pode-se escrever:

$$T(\nu_1) = \lambda_1 \nu_1 + 0\nu_2 + \dots + 0\nu_n$$

$$T(\nu_2) = \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 + \dots + 0\nu_n$$

$$\vdots$$

$$T(\nu_n) = 0\nu_1 + 0\nu_2 + \dots + \lambda_n \nu_n$$

Ou matricialmente:

$$[T]_P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\nu_1] \\ \vdots \\ [\nu_n] \end{bmatrix}$$

onde  $P$  é a matriz dos autovetores dada por:

$$P = [[\nu_1] \quad \dots \quad [\nu_n]]$$

onde cada  $[\nu_i]$  é o vetor-coluna constituído das coordenadas dos autovetores e vale:

$$D = P^{-1}TP \quad (53)$$

sendo

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**Exemplo 28:** Diagonalize o operador dado por  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$  e determine a base no qual tal diagonalização se realize.

**Resolução:** Encontrando-se todos os autovalores:

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Através do polinômio característico:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = 3$$

Encontrando-se os autovetores associados:

$$\text{Para } \lambda_1 = 1: v_1 = [(-1,1)]$$

$$\text{Para } \lambda_2 = 3: v_2 = [(0,1)]$$

Assim, a base  $P = \{(-1,1), (0,1)\}$  e a diagonalização de  $T$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Observação 21:** Observe que vale a operação:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Definição: [Diagonalização de Operadores Simétricos]** Seja  $[T]$  a matriz simétrica que representa o operador Simétrico  $T: V \rightarrow V$ , então valem as seguintes propriedades:

S1) A equação característica de uma matriz simétrica só admite raízes reais.

S2) Se  $T$  admite autovalores distintos, então os autovetores são ortogonais.

S3) Se  $T$  cumpre S1 e S2 então  $T$  é diagonalizável e vale:  $P^tTP$ , onde  $P$  é a matriz de autovetores.

**Exemplo 29:** Determine uma matriz  $P$  que diagonaliza o operador dado pela matriz  $[T] = \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix}$  e calcule  $P^tTP$ .

**Resolução:** Primeiro, determinam-se os autovalores:

$$\det \begin{bmatrix} 11 - \lambda & -12 \\ -12 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Donde obtemos o polinômio  $(11 - \lambda)(4 - \lambda) - 144 = 0$  ou ainda  $\lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0$ .

Assim os autovalores são: 20 e -5.

Encontrando os autovalores associados:

• Para  $\lambda_1 = 20$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} 11 - 20 & -12 \\ -12 & 4 - 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinando o sistema:

$$\begin{cases} -9x_1 - 12y_1 = 0 \\ -12x_1 - 16y_1 = 0 \end{cases}$$

As quais se reduzem para a equação  $3x_1 + 4y_1 = 0$ , resultando no vetor  $v_1 = \left(\frac{-4y_1}{3}, y_1\right)$  ou melhor gerado por  $v_1 = [(-4, 3)]$ .

• Para  $\lambda_2 = -5$ , tem-se:

$$\begin{bmatrix} 11 + 5 & -12 \\ -12 & 4 + 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinando o sistema:

$$\begin{cases} 16x_2 - 12y_2 = 0 \\ -12x_2 + 9y_2 = 0 \end{cases}$$

As quais se reduzem para a equação  $4x_2 - 3y_2 = 0$  ou  $x_2 = \frac{3y_2}{4}$ , sendo assim, o autovetor  $v_2 = [(3,4)]$ .

Perceba que o produto interno entre  $v_1$  e  $v_2$  é nulo, o que comprova que os autovetores são ortogonais entre si.

Assim, a Matriz  $P$  formada pelos autovetores é dada por:

$$[P] = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Realizando o produto de matrizes  $P^tTP$ , e levando em consideração que a matriz  $P$  é Simétrica, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 & 60 \\ -15 & -20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 0 \\ 0 & 125 \end{bmatrix}.$$

O que mostra que quando o operador é simétrico, e com autovalores distintos, então o operador é diagonalizável.

#### 4.4.1. Exercícios de Fixação

*Vamos diagonalizar Operadores? A prática leva à perfeição.*

**1. Diagonalize os seguintes Operadores:**

a)  $T(x, y) = (2x - 3y, 4x + 2y)$

b)  $T(x, y) = (-x + 3y, 2x + 7y)$

c)  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

d)  $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

e)  $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

e)  $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

# CAPÍTULO 5

## FORMAS QUADRÁTICAS

Têm-se dois tipos de formas quadráticas, as que estão no plano - identificadas como cônicas, e as que estão no espaço - identificadas como quádricas. Usa-se fortemente a diagonalização de operadores simétricos para classificar as formas quadráticas mencionadas. Dica ao leitor: Verifique as Cônicas em [3].

**Definição: [Formas Quadráticas]** Uma forma quadrática é uma equação de segundo grau nas variáveis  $x, y$  e  $z$  dada pela equação geral:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (54)$$

onde  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  e  $J$  são escalares reais.

**Definição: [Classificação das Formas Quadráticas]** as formas quadráticas estão divididas em: Formas Quadráticas Planas - Cônicas e Formas Quadráticas Espaciais - Superfícies quadráticas.

### 5.1. Forma Quadrática no Plano - Cônicas

Observe as formas quadráticas no plano  $xOy$ , automaticamente, não temos o terceiro eixo, portanto  $z = 0$ , ou seja, quando na equação (48) tem-se  $C = E = F = I = 0$ , reduzindo a equação para:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0 \quad (55)$$

A equação (49) reescrita usando matrizes exhibe a forma:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [f] = [0]$$

que geram as cônicas degeneradas: parábolas, elipses e hipérbolas (quando  $a$ ,  $b$  e  $c$  não se anulam) e as cônicas não degeneradas: circunferências, retas e pontos (quando  $a$ ,  $b$  e  $c$  se anulam).

Note que a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$  é uma matriz simétrica e o acréscimo do coeficiente 2 é para ajustar a escrita da matriz  $A$ .

De maneira que usando as rotações e translações, a equação (55) pode ser modelada em termos da diagonalização de operadores em:

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [f] = [0] \quad (56)$$

onde  $v_1 = (x_1, y_1)$  e  $v_2 = (x_2, y_2)$  são autovetores associados a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , respectivamente.

**Observação 18:** Os autovetores deverão ser unitários e de forma que  $\det P = \pm 1$  e  $P$  é de tal sorte que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

correspondendo a uma rotação.

### **Definição: [Classificação das Cônicas degeneradas]**

A equação de uma cônica de centro é:  $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F$ .

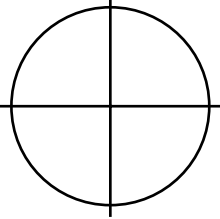
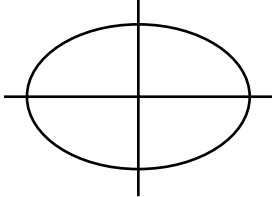
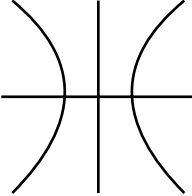
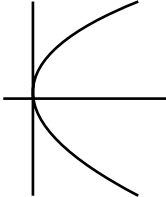
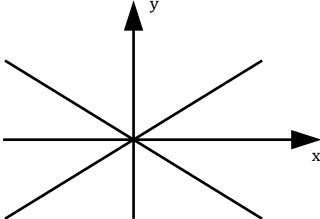
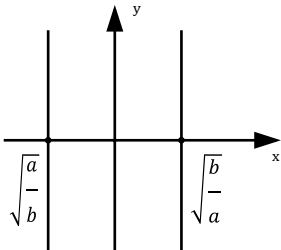
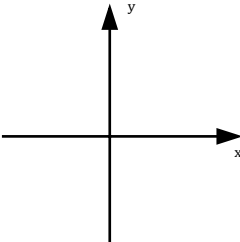
- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem de mesmo sinal, a cônica será do gênero **Elipse**.
- Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem de sinais diferentes, a cônica será do gênero **Hipérbole**.

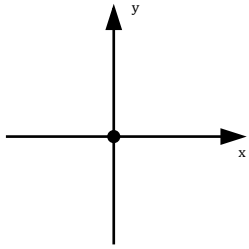
A equação de uma cônica sem centro é:  $\lambda_2 Y^2 + qX = 0$  ou  $\lambda_1 X^2 + qY = 0$

• Uma cônica representada por qualquer uma dessas equações é do gênero **Parábola**.

Neste caso,  $X$  e  $Y$  representam uma translação do centro da cônica em relação à origem.

**Quadro 5.** Tipos de Cônicas

Cônica	Equação	Visualização
Circunferência	$x^2 + y^2 = r^2$	
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Hipérbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Parábola	$y^2 - Dx = 0$ $D \neq 0$	
Par de retas concorrentes (Hipérbole degenerada)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \implies y = \pm \frac{b}{a}x$ $a > 0$ $b > 0$	
Par de retas paralelas (Parábola degenerada)	$ax^2 - b = 0$ $a > 0$ $b > 0$	
Uma reta - Eixo y (Parábola degenerada)	$x^2 = 0$	

Um ponto (Elipse degenerada)	$ax^2 - by^2 = 0$ $a > 0$ $b > 0$	
Vazio (Elipse ou Parábola degenerada)	$ax^2 + by^2 + r^2 = 0$ $a > 0$ $b > 0$ $(r \neq 0)$	

Fonte: Boldrini *et al.*, 1980

**Exemplo 30:** Classifique a forma quadrática no plano dada por  $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7\sqrt{2}x + 5\sqrt{2}y + 10 = 0$ .

**Resolução:** Primeiro, deve-se colocar a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7\sqrt{2} & 5\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Segundo, diagonalizar a matriz simétrica  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

• Encontrando os autovalores:

$$\det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Temos o polinômio característico:  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ , donde se obtém  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 3$ . Encontrando os autovetores associados:

Para  $\lambda_1 = 1$ :  $v_2 = [(-1,1)]$

Para  $\lambda_2 = 3$ :  $v_1 = [(1,1)]$

• Normalizando os autovetores:

$$v_1 = \left( \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e } v_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Terceiro, substitui-se a diagonalização de  $A$  e a matriz  $P$  de acordo com a equação (50):

$$[x' \ y'] \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [7\sqrt{2} \ 5\sqrt{2}] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + [10] = [0] \quad (57)$$

Ajusta-se a matriz de autovetores  $P$  de maneira que o determinante seja igual a 1, e por isso a ordem na matriz  $D$  mudou.

A representação dada em (51) se refere à:

$$3x'^2 + y'^2 + 12x' - 2y' + 10 = 0$$

Fazendo o completamento de quadrados:

$$3(x' + 2)^2 + (y' - 1)^2 = 3 \quad (58)$$

Quarto, identificando as translações de centros:

$$\begin{cases} X = x' + 2 \\ Y = y' - 1 \end{cases}$$

A equação (52) fica modelada por:

$$3X^2 + Y^2 = 3$$

Ou ainda:

$$X^2 + \frac{Y^2}{3} = 1$$

O qual se trata de uma Elipse de centro em  $O'(-2,1)$  com eixo maior sobre o eixo dos  $y$ , cujos semi-eixos são 1 e  $\sqrt{3}$ .

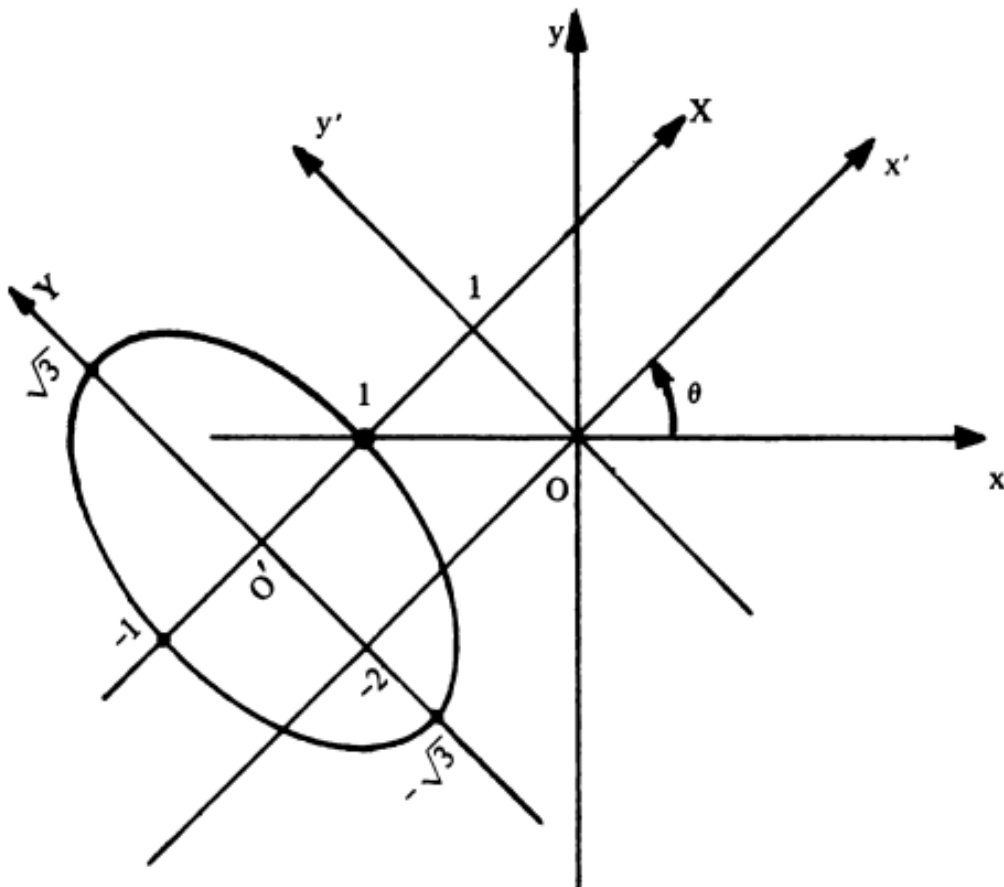
Quinto, identifica-se o ângulo de rotação, para isto verifica-se o ângulo entre um dos vetores canônicos,  $e_1$  ou  $e_2$ , e um dos autovetores encontrados,  $v_1$  ou  $v_2$ , definindo-se, assim, o ângulo entre os sistemas de coordenadas  $xOy$  e  $x'O'y'$ .

Calculando o ângulo entre  $e_1$  e  $v_1$ :

$$\cos\theta = \frac{(1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{|(1,0)| \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Logo o ângulo é de  $45^\circ$ .

**Figura 9.** Representação da Cônica rotacionada do Exemplo 21



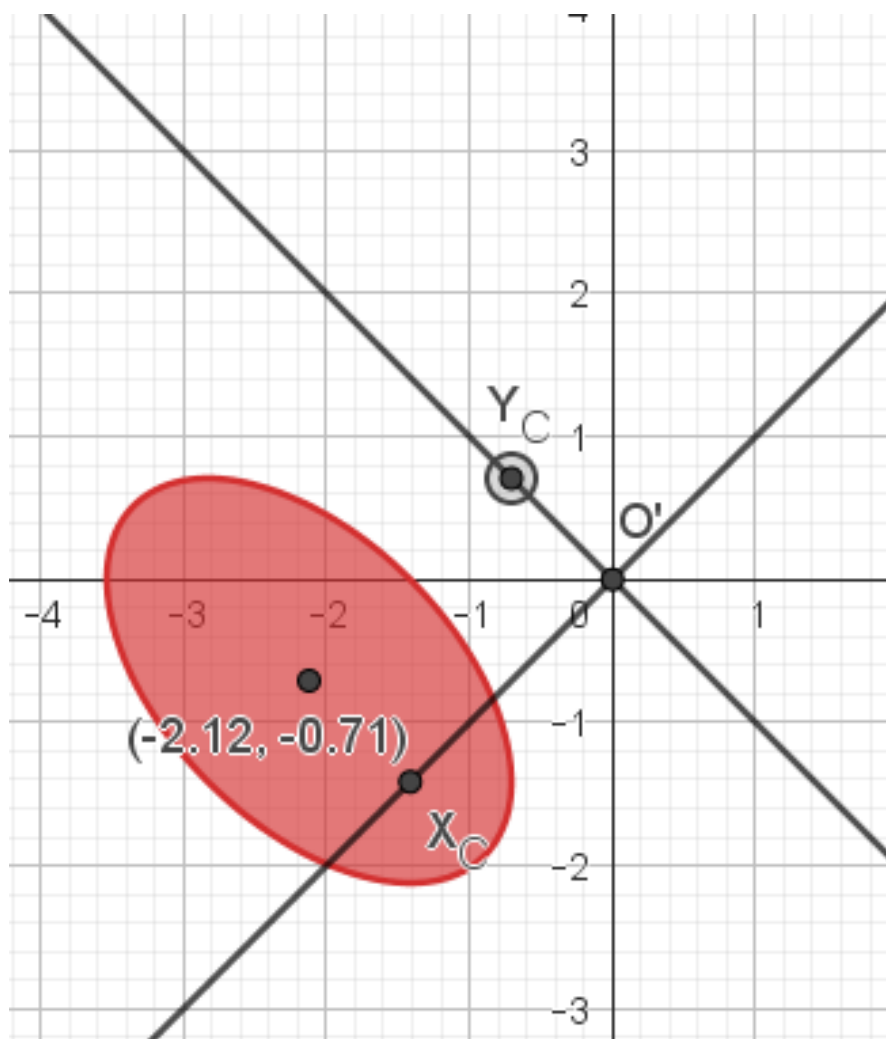
**Fonte:** Steimbruch, 1987

Observando a Figura 9, percebe-se claramente que o centro da cônica rotacionada teve alteração em suas coordenadas, pois ela está em referência no plano  $x_0y$ .

Para desenhar a mãos livres, o procedimento seria transformar todos os pontos principais da cônica, através da matriz da TL Rotação. Por exemplo, o centro da cônica no sistema  $x_0y$  é  $O(-2,1)$  e sofrerá uma rotação de  $45^\circ$ , logo:

$$\begin{bmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

**Figura 10.** Representação da Cônica de Centro: Elipse



**Fonte:** App GeoGebra Gráfica

### 5.1.1. Exercícios de Fixação

*As Quádricas no Plano são bem importantes e já foram vistas somente com translação de centro ou foco em [3], mas o grande diferencial agora é a rotação da cônica. De uma forma bem mais completa, através da diagonalização do Operador que define tal Quádrica, isto se torna possível. Agora vamos colocar em prática o que você aprendeu até aqui!*

**1.** Para cada uma das Quádricas no Plano, Cônicas, faça o que se pede:

I - Escreva a Cônica na forma matricial;

II - Determine e classifique a partir dos autovalores a Cônica;

III - Diagonalize o Operador e escreva a Forma Reduzida com translação de eixos;

IV - Determine o Ângulo de Rotação;

V - Plote a Cônica no Plano 2D.

a)  $4x^2 - 3y^2 + 24xy - 156 = 0$

b)  $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 12 = 0$

c)  $x^2 - 6x + 8y - 7 = 0$

d)  $7x^2 + 13y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16$

e)  $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4 = 0$

f)  $x^2 + y^2 + xy + 5\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 1 = 0$

## 5.2. Forma Quadrática no Espaço - Quádricas

As formas quadráticas no espaço levam em consideração o eixo  $z$ , ou seja, a equação (48), com algumas alterações, a fim de que a matriz se torne simétrica, assim a equação fica:

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \quad (59)$$

A equação (53) reescrita usando matrizes exhibe a forma:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [q] = [0]$$

que geram as quádricas em  $\mathbb{R}^3$ : Elipsoide, Hiperboloide e Paraboloides (quando  $a, b$  e  $c$  não se anulam simultaneamente) e Esferas e as cônicas não degeneradas: Planos ou retas 3D (quando  $a, b$  e  $c$  se anulam).

Note que a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$  é uma matriz simétrica e o acréscimo do

coeficiente 2 é para ajustar a escrita da matriz  $A$ .

De maneira que, usando as rotações e translações, a equação (59) pode ser modelada em termos da diagonalização de operadores em:

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & n & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + [q] = [0] \quad (60)$$

onde  $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$  e  $v_3 = (x_3, y_3, z_3)$  são autovetores associados a  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , respectivamente.

**Observação 18:** Os autovetores deverão ser unitários e de forma que  $\det P = \pm 1$  e  $P$  é de tal sorte que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

correspondendo a uma rotação.

**Definição: [Classificação das Quádricas degeneradas]**

A equação de uma quádrlica de centro é:  $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 = Q$ .

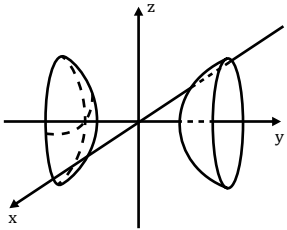
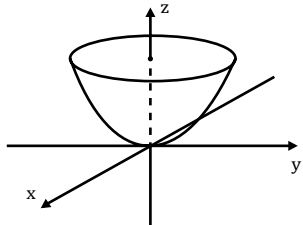
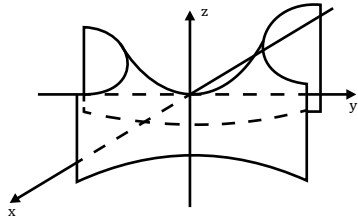
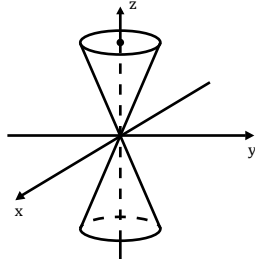
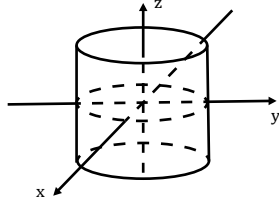
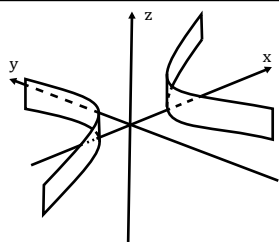
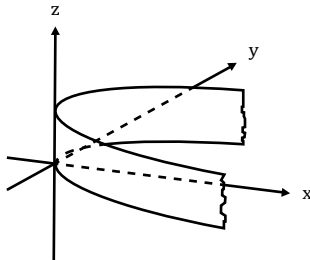
- Dependendo dos valores de  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  e  $Q$ , a quádrlica será do tipo **Elipsoide** ou **Hiperboloide**.

A equação de uma cônica sem centro é:  $\lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + rX = 0$  ou  $\lambda_1 X^2 + \lambda_3 Z^2 + sY = 0$  ou  $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + tZ = 0$

Uma quádrlica representada por qualquer uma dessas equações é do gênero **Paraboloide**.

**Quadro 6.** Tipos de Quádricas

Quádrlica	Equação	Visualização
Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Hiperboloide de uma folha	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	

Hiperboloide de duas folhas	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	
Paraboloide Elíptico	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$	
Paraboloide Hiperbólico	$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$	
Cone Quadrático	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$	
Cilindro	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Cilindro Hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	
Cilindro Elíptico	$x = ky^2$	

Fonte: Boldrini *et al.*, 1980.

**Exemplo 31:** Determine o tipo da quádrlica representada pela equação:

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + \sqrt{3}y - \frac{7}{12} = 0$$

**Resolução:**

Primeiro, deve-se colocar a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \quad \sqrt{3} \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \left[ -\frac{7}{12} \right] = [0]$$

Segundo, diagonalizar a matriz simétrica  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

• Encontrando os autovalores:

$$\det \begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Temos o polinômio característico:  $-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0$ , onde se obtém:  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$  e  $\lambda_3 = 6$ . Encontrando os autovetores associados:

Para  $\lambda_1 = 2$ :  $v_1 = [(1, 0, -1)]$

Para  $\lambda_2 = 3$ :  $v_2 = [(1, 1, 1)]$

Para  $\lambda_3 = 6$ :  $v_3 = [(1, -2, 1)]$

• Normalizando os autovetores:

$$v_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right), v_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ e } v_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Terceiro, substitui-se a diagonalização de  $A$  e a matriz  $P$  de acordo com a equação (54):

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [0 \quad \sqrt{3} \quad 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \left[ -\frac{7}{12} \right] = [0] \quad (61)$$

Ajusta-se a matriz de autovetores  $P$  de maneira que o determinante seja igual a 1.

A representação dada em (61) se refere a:

$$2x'^2 + 3\left(y'^2 + \frac{y'}{3} + \frac{1}{36}\right) + 6\left(z'^2 - \frac{\sqrt{2}}{6}z' + \frac{1}{72}\right) = \frac{7}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12}$$

Fazendo o completamento de quadrados:

$$2x'^2 + 3\left(y' + \frac{1}{6}\right)^2 + 6\left(z' - \frac{\sqrt{2}}{12}\right)^2 = \frac{3}{4} \quad (62)$$

Quarto, identificando as translações de centros:

$$\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \frac{1}{6} \\ Z = z' - \frac{\sqrt{2}}{12} \end{cases}$$

A equação (62) fica modelada por:

$$2X^2 + 3Y^2 + 6Z^2 = \frac{3}{4}$$

Dividindo por  $\frac{3}{4}$ :

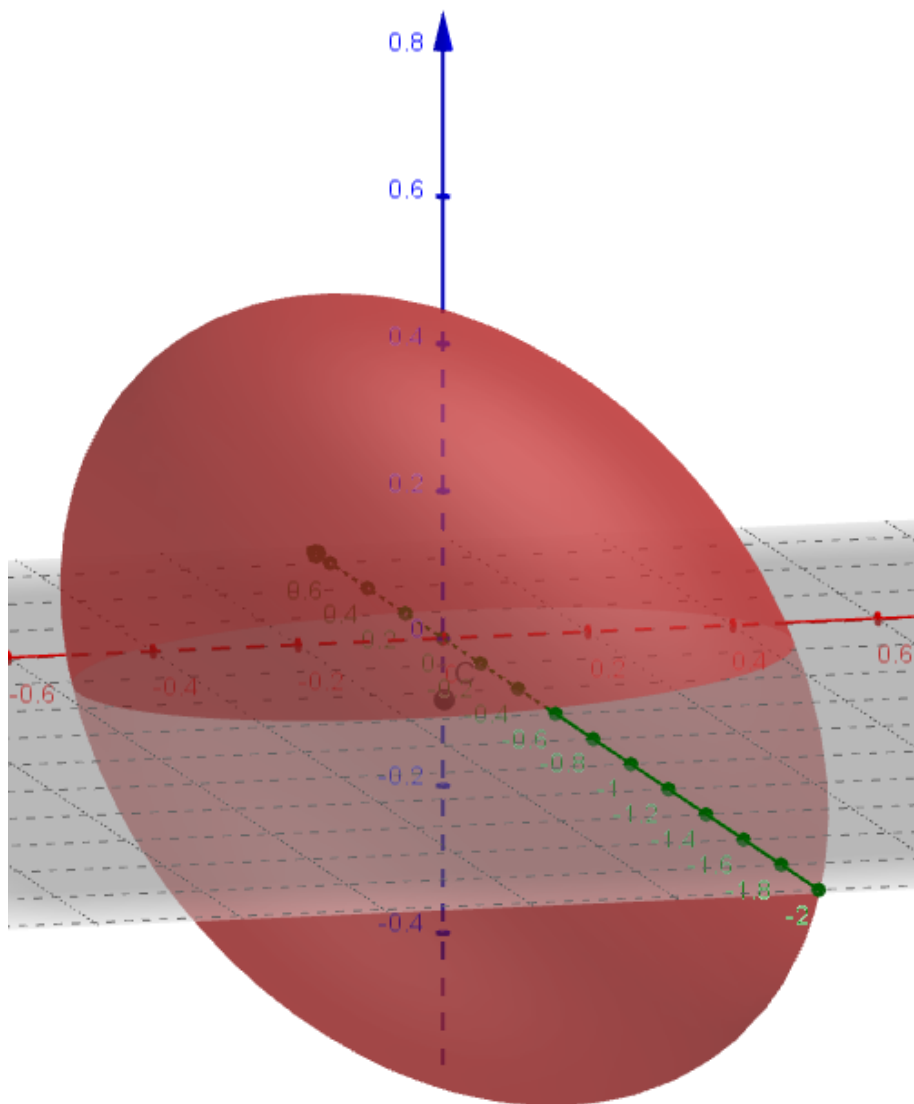
$$\frac{4}{3}2X^2 + \frac{4}{3}3Y^2 + \frac{4}{3}6Z^2 = 1$$

Ou ainda:

$$\frac{X^2}{\frac{3}{8}} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4}} + \frac{Z^2}{\frac{1}{8}} = 1$$

O qual se trata de uma Elipse de centro em  $O' \left( 0, -\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{2}}{12} \right)$ . Tratando-se de um Elipsóide, com semi-eixo (Eixo  $x$ ) de  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ , semi-eixo (Eixo  $y$ ) de  $\frac{1}{2}$  e semi-eixo (Eixo  $z$ ) de  $\frac{1}{\sqrt{8}}$ .

**Figura 11.** Quádrica de Centro: Elipsóide Rotacionado (Exemplo 22)



**Fonte:** App GeoGebra Calculadora 3D

### 5.2.1. Exercícios de Fixação

*As Quádricas no Espaço já são um pouco mais difíceis, para isso é preciso se dedicar para lembrar das fórmulas que as define. Elas serão muito utilizadas em Cálculo Diferencial e Integral com funções com duas variáveis. Vamos praticar?*

1. Para cada uma das Quádricas no Espaço, faça o que se pede:

I - Escreva a equação na Forma Matricial;

II - Diagonalize o Operador Simétrico;

III - A partir dos autovalores, classifique a Quádrica;

IV - Determine a Forma Reduzida da Quádrica com translação de Eixos/Foco;

V - Calcule o ângulo de rotação;

VI - Plote a Quádrica no Espaço 3D.

a)  $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz + \sqrt{3}y - \frac{7}{12} = 0$

b)  $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 8x + 24y - 2z + 41 = 0$

c)  $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 = 144$

d)  $x^2 + 4y^2 - z^2 - 2x + 16y + 17 = 0$

e)  $x^2 + y^2 - 2y = 0$

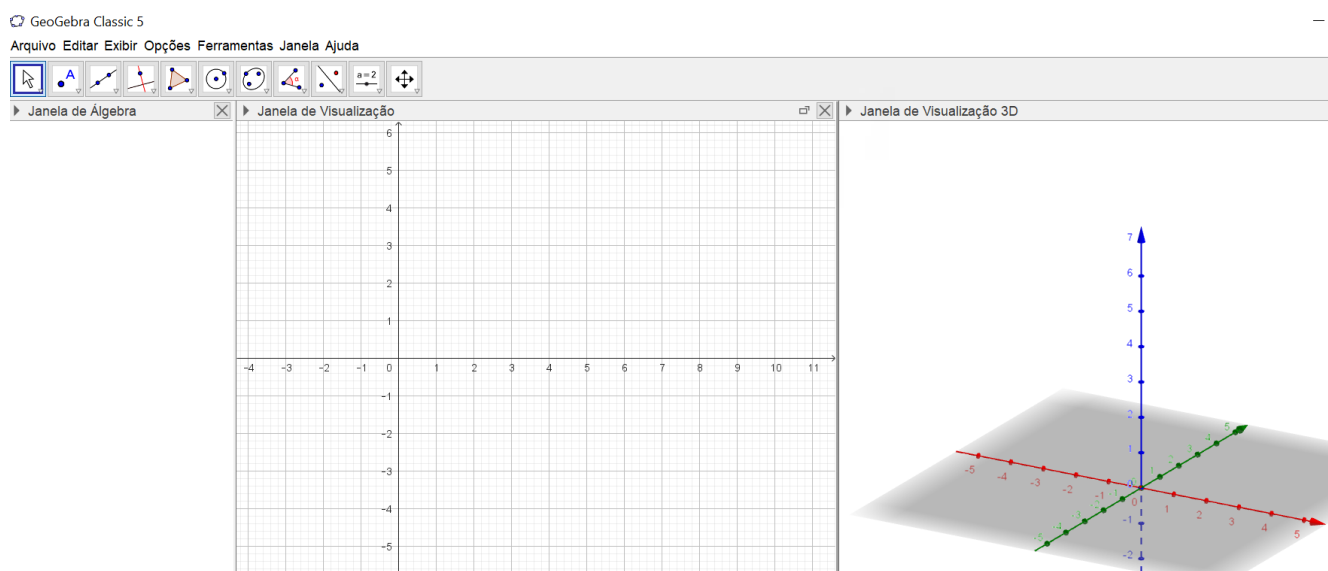
f)  $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x + 6y - 2z + 2 = 0$

g)  $y^2 - 4xz - 4x + 2y - 3 = 0$

### 5.3. Construção de Cônicas e Quádricas no GeoGebra

No GeoGebra, existem algumas janelas que podem ser ativadas ou desativadas conforme a necessidade. Entre as mais utilizadas: ENTRADA (em que se pode colocar a expressão matemática de equações, funções, entre outras e sendo ativada apenas com um ENTER no final), JANELA DE ÁLGEBRA (em que se pode enxergar os elementos que estão sendo trabalhados, podendo também ser acionadas configurações, definindo cor, estilo de linha, álgebra, entre outros) e as JANELAS DE VISUALIZAÇÃO 2D e 3D, como pode-se observar na Figura 7. Todas essas Janelas auxiliares podem ser ativadas com teclas de atalho, ou na barra de ferramentas - Exibir.

**Figura 12.** Demonstração do Layout do GeoGebra *Classic 5* - Versão Computador



**Fonte:** Geogebra *Classic 5*

Para utilizar a versão do aplicativo, basta buscar no seu aparelho celular, na loja de aplicativo, o aplicativo SUITE GEOGEBRA, em que de uma só vez se instala as versões: Gráfica, Calculadora 3D, entre outras, conforme mostrado na Figura 8.

**Figura 13.** Layout do Suite GeoGebra Calculadora - Versão para Android

## Escolha a Calculadora



Gráfica



Calculadora  
3D



Geometria



Cálculo  
Simbólico



Probabilidade  
e

**Fonte:** Suíte GeoGebra Calculadora

Para exibir o traço das cônicas – as quais são curvas em 2D – usa-se o GeoGebra Gráfica (Cujos Eixos principais são o eixo das abscissas e eixo das ordenadas) e para quádricas – as quais são superfícies em  $\mathbb{R}^3$  – usa-se o GeoGebra Calculadora 3D (cujos eixos são identificados sistema RGB – Red (Vermelho), Green (Verde) e Blue (Azul)) identificando os **Eixos xyz** respectivamente.

Utilizando a ENTRADA, basta inserir a equação em sua forma geral ou reduzida e o ENTER ao final para que apareça o traço no espaço adaptado. Só lembrando que, na JANELA DE ÁLGEBRA, será identificado o nome, caso não seja nomeado, o próprio software atribui um nome para o objeto criado.

Algumas funções pré-existentes são interessantes para enfatizar os elementos principais de cada cônica/quádrlica. Para acessar tais funções, basta iniciar a descrição (conforme quadro) que abrirá uma janela de opções, contendo a descrição do que será necessário para a sua utilização, ou seja, de acordo com o nome descrito na JANELA DE ÁLGEBRA, será substituído dentro dos símbolos <>.

**Quadro 7.** Tabela de Comandos de funções pré-existentes do software GeoGebra

Descrição	Comando
Centro da Cônica/Quádrlica	Centro(<Cônica> Centro(<Quádrlica>)
Eixos da Cônica/Quádrlica	EixoMaior(<Cônica> EixoMenor(<Cônica> Eixos(<Cônica> Eixos(<Quádrlica>)
Foco da Cônica	Foco(<Cônica>)

**Fonte:** Steimbruch, 1987

### 5.3.1. Exercícios de Fixação

*Viu como as aplicações de Álgebra Linear podem nos proporcionar um conhecimento de tais objetos que circundam a nossa vida? Se parar para pensar na Indústria, nas Construções, na Astronomia, e em vários outros campos, sempre nos deparamos com as Cônicas e Quádricas. E agora, com o auxílio da tecnologia, podemos descrever ou mesmo auxiliar mais na aprendizagem de tais objetos. Aqui só será necessário localizar e situar no plano adequado tais objetos, mas em Cálculo Diferencial e Integral você irá aprender a calcular áreas e volumes, descrever curvatura e torções e assim o estudo ficará completo. Portanto, vamos praticar no software GeoGebra e ficar experts na hora de destacar os elementos de cada Quádrlica, seja no Plano ou no Espaço. Bom estudo!*

**1.** Para cada uma das Quádricas nos exercícios propostos da seção 5.1.1 e 5.2.1, plote no GeoGebra Calculadora Gráfica e Calculadora 3D, respectivamente. Destaque também:

I - O centro da Quádrlica;

II - Destaque os Eixos da Quádrlica;

III - Destaque o Foco da Quádrlica, caso seja necessário;

IV - Os eixos rotacionados;

V - Insira Legenda destacando o nome da Quádrlica, usando as configurações e incluindo Legenda.

# REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L. *et al.* *Álgebra Linear*. 3. ED. SÃO PAULO: HARPER E ROW DO BRASIL, 1980.

PEREIRA, E. L. F. *Álgebra Linear com uso de softwares educacionais*. MANAUS: EDITORA UEA, 2023.

PEREIRA, E. L. F. *Uma proposta de aplicação de cônicas nas Engenharias e com o uso de Softwares*. RORAIMA: XVI CONGRESSO DE MATEMÁTICA DA UFRR. 2022.

PEREIRA, E. L. F. *O ensino de Álgebra Linear com o uso dos softwares Matlab e GeoGebra*. II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA MACKENZIE: REFLEXÃO SOBRE A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. SÃO PAULO: UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE, 2021

STEINBRUCH. A.; WINTERLE. P. *Álgebra Linear*. PEARSON. SÃO PAULO: MAKRON BOOKS, 1987.

# SOBRE A AUTORA

Nascida em Manaus, Amazonas, onde diplomou-se em Licenciatura Plena em Matemática em 2002, em seguida fez Especialização em Ensino de Matemática com o trabalho de conclusão intitulado *Analfabetismo Matemático nas Escolas Públicas de Manaus - AM*, em 2004, e Mestrado na área de Matemática Pura em Álgebra com o título de dissertação *Subgrupos Normais finitamente gerados em Grupos Limites*, em 2006, na Universidade Federal do Amazonas - UFAM. É atualmente pesquisadora e professora efetiva da Universidade do Estado do Amazonas - UEA, lotada na EST - Escola Superior de Tecnologia, onde trabalha com o ciclo básico de Engenharias (Civil, Mecânica, Controle e Automação, Naval, Produção, Elétrica, Eletrônica), Licenciaturas de Informática e Meteorologia. Publicação em diversos congressos e Encontros relacionados à Educação Matemática, Matemática e Engenharia, atuando também em Projetos de Extensão e de Iniciação Científica.

**título** Álgebra Linear: análise de espaços  
vetoriais a cônicas e quádricas v. 2

**autora** Elaine Ladislau Ferreira Pereira

**tipografias** Cambria Math  
Source Serif Variable  
Yanone Kaffeesatz

**número de páginas** 108

Agosto de dois mil e vinte e quatro, dez anos do lançamento da obra  
*Cálculo Vetorial e Aplicações*, de Kleber Daum Machado.



para conhecer mais da *editora*UEA e de nossas publicações,  
acesse o qr code abaixo



Ao entrar na Universidade em um curso de Engenharia, já parou para se perguntar onde a Matemática está inserida? Ou melhor, como a Álgebra pode auxiliar do início ao fim, nos cálculos que serão utilizados? Neste livro, você pode ter uma idealização de que os Espaços Vetoriais podem ser bem divertidos, e admitem muitas normas, as quais podem validar medições triviais ou até mesmo causar distorções, e além disso, as transformações lineares entre tais espaços podem ter aplicações diretas na Engenharia, uma vez que as Transformações Lineares Planas e Espaciais conseguem destacar reflexões, rotações e cisalhamentos, e poderem ser associadas à movimentos de braços robóticos, simulação e análise de estruturas, localização e mapeamento geográfico, análise de imagens, detecção de objetos em sequências de imagens e modelagem de objetos 2D e 3D. Finalizando com as Formas Quadráticas, as quais estão associadas a análise de tensões e deformações na Engenharia Estrutural, modelagem de comportamento dinâmico de sistemas mecânicos e muitas outras aplicações na área de análise de desempenho de sistemas. Ao adentrar no ramo da Engenharia, muitas soluções serão requeridas e logo, se precisa ter uma gama de artifícios para contornar tais problemas, conseqüentemente, as técnicas aqui exemplificadas podem ser utilizadas, pois podem fornecer a estrutura básica para representar e manipular modelos para sistemas mais complexos.

*Elainne Ladislau Ferreira Pereira*  
Professora Efetiva e membro da Comissão de Extensão  
Universidade do Estado do Amazonas - UEA



*editora*  
**UEA**



**UEA**  
UNIVERSIDADE  
DO ESTADO DO  
AMAZONAS



**AMAZONAS**  
GOVERNO DO ESTADO