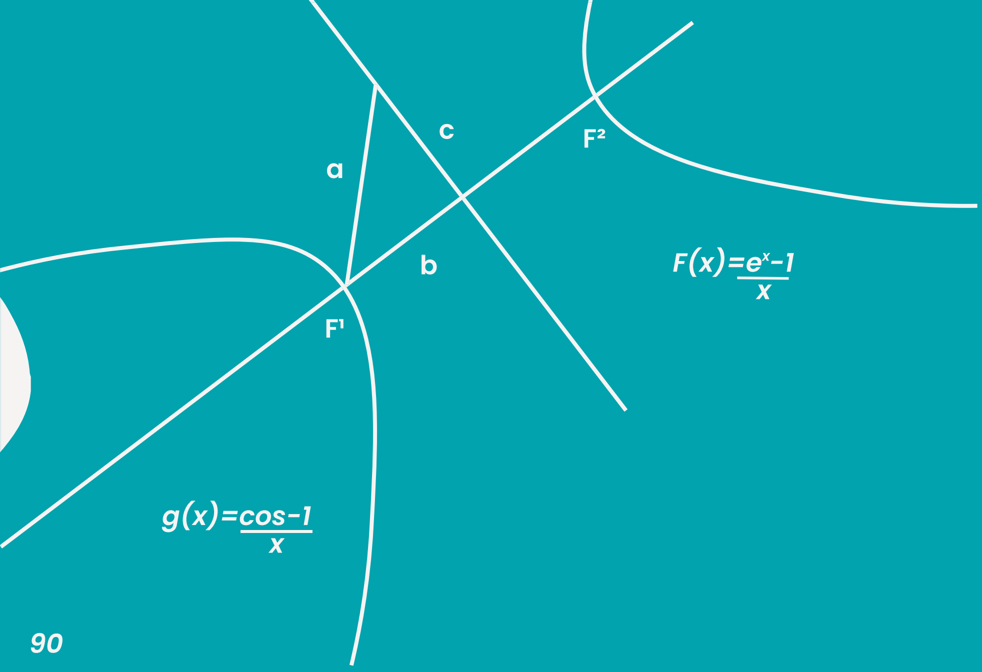
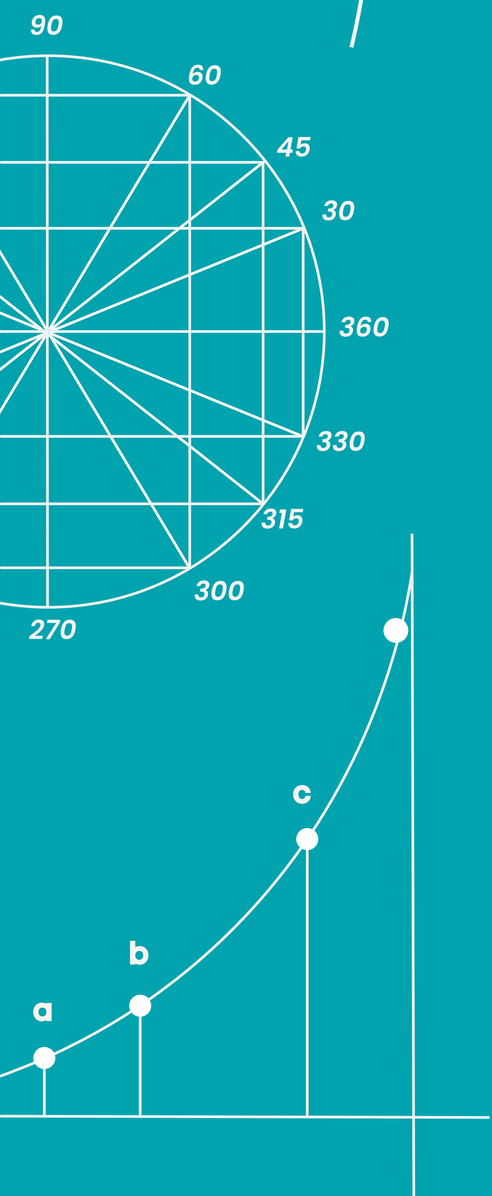


V.1



Cálculo

Análise de gráfico de Funções Reais e suas Aplicações com o uso de Software Educacional

Elainne Ladislau Ferreira Pereira

editora UEA

Cálculo

Análise de gráfico de funções reais e suas aplicações com uso de software educacional

Cálculo

Análise de gráfico de funções reais e suas aplicações
com uso de software educacional

Elaine Ladislau Ferreira Pereira

editora
UEA

Wesley Sá
Coordenação Editorial

Raquel Maciel
Assistência Editorial

Ciara Curintima
Rebekah Pereira
Projeto Gráfico

André Teixeira
Isadora Lopes
Revisão

Iasmim Rodrigues
Kamilla Pierre
Diagramação

Iasmim Rodrigues
Finalização

Esta edição foi revisada conforme as regras do Novo Acordo Ortográfico
da Língua Portuguesa

P436c
2025

Cálculo v.1: análise de gráfico de funções reais e suas aplicações com o uso de software educacional / Elainne Ladislau Ferreira Pereira. 1.ed. — Manaus (AM): Editora UEA, 2025.
149 p.:il color [Ebook]
Formato PDF

ISBN 978-85-7883-744-0

Inclui referências bibliográficas

1. Cálculo. 2. Softwares Educacionais. 3. Funções reais. I. Título

CDU 1997 – 517.97

Elaborada pela bibliotecária Sheyla Lobo Mota-11/CRB-484

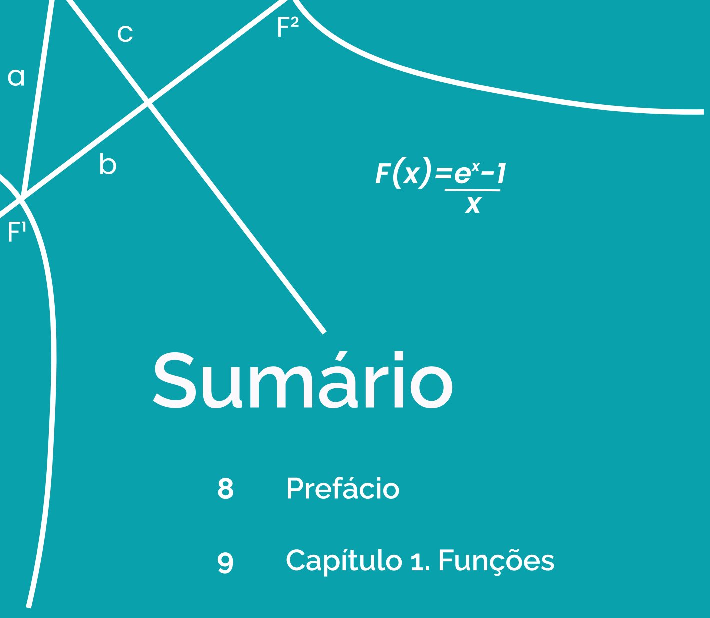
Editora afiliada

Associação Brasileira
das Editoras Universitárias

*editora*UEA

Av. Djalma Batista, 3578 – Flores | Manaus – AM – Brasil
CEP 69050-010 | +55 92 992058858
editora.uea.edu.br | editora@uea.edu.br

Aos meus filhos,
Fernanda Ladislau e Felipe Braz



Sumário

Prefácio

Este livro foi construído com o objetivo de auxiliar discentes de graduação das mais diversas Engenharias, em particular os da Universidade do Estado do Amazonas - UEA.

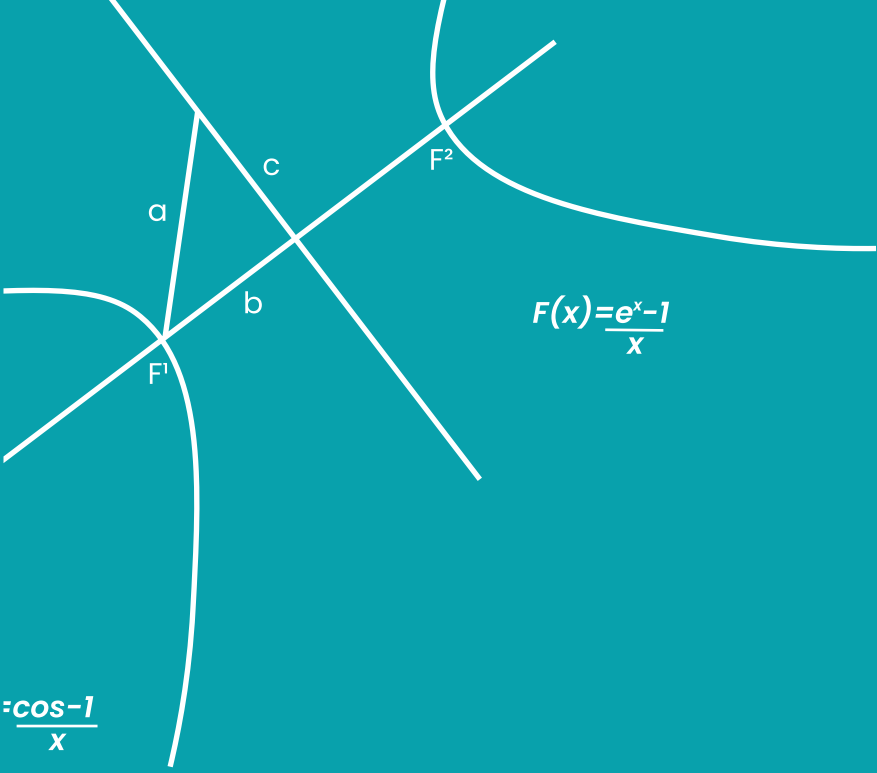
A análise de funções reais será desde o tratamento analítico até o uso do software GeoGebra, com o intuito de adquirir um pouco mais de conhecimento a respeito das particularidades de cada função, sendo as mais comuns: afins, lineares, quadráticas, além das funções trigonométricas: senóide, cossenóide e tangenóide.

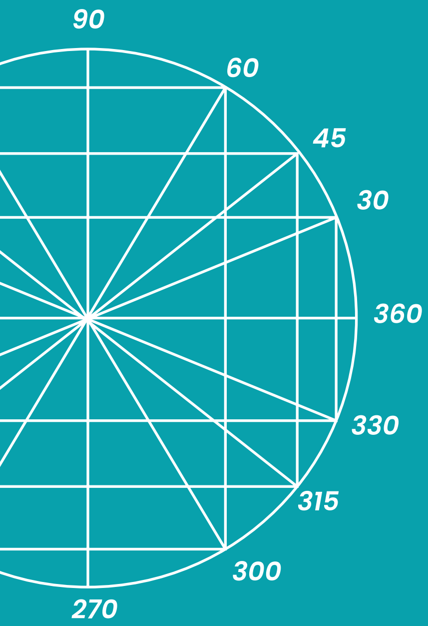
O tratamento diferencial e integral de funções também faz parte desse livro, trazendo o auxílio do software na construção de definições e percepções das aplicações. Para que se possa preencher lacunas do saber aos leitores, serão exemplificados os detalhamentos de cálculos, como o uso de ferramentas do software, aprimorando a concepção das principais definições.

Você, caro leitor, não pense que a Matemática se faz de maneira resumida, em poucas linhas. Na verdade, quanto mais informação tiver na sua resolução, melhor! Atente-se para as diversas opções de trabalhar conjuntamente com o software GeoGebra para melhorar a sua escrita. Sempre que possível, enuncie os principais Teoremas, Lemas ou Propriedades, fazendo com que sua resposta seja mais convincente. E que, na sua mente, se construa uma cadência lógica dos fatos de argumentação, a fim de evidenciar a sua aprendizagem.

Desta forma, a escrita desse livro foi ampliada e contém uma gama de possibilidades para solucionar um determinado problema. A Matemática é rica na sua forma de resolução, sendo a resposta sempre única e verdadeira. Claramente, existe um método mais eficaz, que será desenvolvido nas entrelinhas das resoluções.

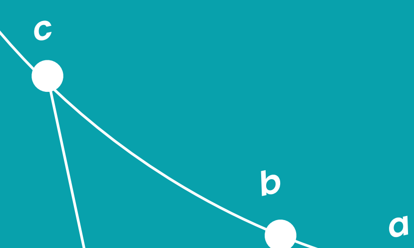
Mas, nada impede de resolver um determinado exercício optando ser solucionado pela maneira mais construtiva, ainda mais se tratando de gráficos de funções.





Funções

Capítulo 01



Os objetos de estudo que permeiam do início ao fim a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral são as funções. Por este motivo, neste primeiro capítulo serão estudados todos os detalhes e também a visualização no software GeoGebra, para que estes possam ser amplamente utilizados durante todo o estudo. De forma mais abrangente, será construído um "banco de dados" sobre funções, cujo comportamento é totalmente conhecido, e a partir disso, outras funções com restrições, como, por exemplo, as funções racionais, poderão ser analisadas.

A função nada mais é do que um terno *(A, B, f)*, onde A e B são conjuntos não vazios e f é uma lei de associação entre A e B.

Uma das prioridades da função é de que todo elemento de A esteja relacionado com apenas um elemento de B, de tal modo que todos os elementos de A sejam totalmente utilizados. Pode ser que nem todos os elementos de B sejam relacionados, ou seja, que nem todos sejam imagens de um elemento vindo de A, constituindo-se, assim, o conjunto Imagem da função f, o qual é subconjunto de B.

Em termos algébricos, dado um $x \in A, \exists y \in B$, tal que $f(x) = y$.

Dizemos, assim, que o conjunto A é o ***Domínio*** da função f : ***D(f)***, B o ***Contradomínio*** de *f*: ***CD (f)***, onde o conjunto ***Imagem*** está contido em B, e $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f}) \subset B$. Também, o gráfico da função é definido por $\boldsymbol{Gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D(f), y \in Im(f)\}$ onde seus pontos estão representados no Plano Cartesiano $x0y$, sendo o eixo horizontal chamado Eixo das Abscissas (Eixo x) e o eixo vertical é chamado Eixo das Ordenadas (Eixo y).

Neste caso em particular, tanto o conjunto A quanto B serão o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, trabalhando-se apenas com funções reais.

Uma noção intuitiva que já será trabalhada no início é a noção de Limite no Infinito e Limite Infinito de uma função, para que se possa ter um detalhamento do comportamento completo da função.

A noção do limite a seguir será mais detalhada, porém precisamos de um conceito mesmo que com o auxílio de tabelas, para entender o que acontece no infinito com o gráfico da função.

Definição Noção Intuitiva [Limite no Infinito] Seja f uma função definida em algum intervalo $(a, +\infty)$. Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

pode ter um dos seguintes comportamentos:

i. pode se aproximar de uma reta $y = L$. Notação: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

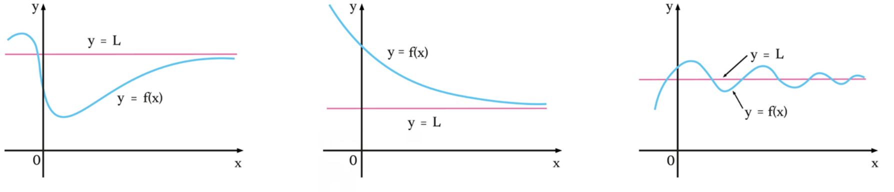
ii. pode "explodir", isto é, as imagens $f(x)$ aumentam muito à medida que x aumenta. Notação: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

iii. pode "decrescer", isto é, as imagens $f(x)$ diminuem muito à medida que x aumenta. Notação: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

Todas essas possibilidades investigam o comportamento da função no infinito.

Para exemplificar o caso i), temos a Figura 1, que ilustra diversos casos em que a função se aproxima de uma reta $y = L$ no infinito.

Figura 1. Exemplos de Funções cujo comportamento se aproxima do infinito de uma reta $y = L$



Fonte: Stewart, 2013

A definição de Limite no Infinito pode ser feita tanto para à direita do intervalo contendo o ponto a, e neste caso dizemos que a função, ao ser calculada em valores de x cada vez maiores, i.e, x tende para $+\infty$, denotado por:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Ou, de maneira análoga, quando a função é calculada em valores grandes de x com sinal negativo, i.e, x tende para $-\infty$, denotado por:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)$$

No limite no infinito a resposta sempre dependerá para onde as imagens $f(x)$ estão convergindo! Se a resposta for:

- As imagens estão "afunilando" para um valor real (caso i)):

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

- As imagens também aumentam, então dizemos que (caso ii)):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- As imagens diminuem, então dizemos que (caso iii)):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

De maneira análoga, pode-se ter também: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ (caso i)), $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (caso ii)) e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (caso iii)).

As funções que iremos trabalhar têm um comportamento padrão e não mudam no infinito. Por isso, é importante ter esse conhecimento, construindo-se um banco de funções com o comportamento total conhecido.

Com essa noção já trabalhada no início, o leitor não terá tantas dúvidas no decorrer dos capítulos.

1.1. Função Constante

Apesar de as funções constantes não serem enunciadas nos livros-textos convencionais, elas também são importantes.

Definição: A função constante é definida pela lei $f(x) = k$, onde $k \in \mathbb{R}$.

Tais funções são representadas no plano cartesiano como retas paralelas ao eixo coordenado x.

Exemplo 1: Esboce o gráfico da função $f(x) = 3$.

Resolução: Para entender bem como a função atua, segue a tabela com valores aleatoriamente determinados.

Quadro 1. Efetuação dos cálculos dos pontos do gráfico

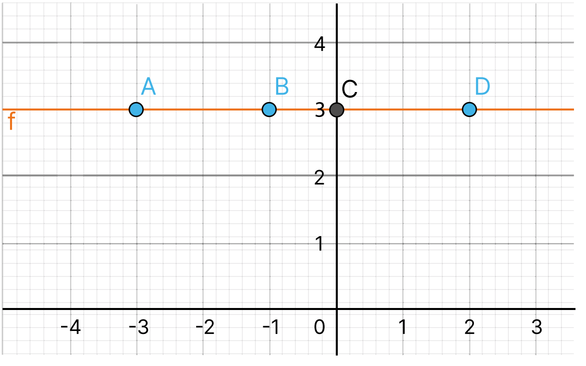
Abscissa (x)	Ordenada (y) "f (x) = 3"	Ponto
-3	3	A (-3,3)
-1	3	B (-1,3)

0	3	C (0,3)
2	3	D (2,3)

Fonte: Da autora

Interessante notar que a imagem está fixada, e para qualquer valor de *x* que for atribuído, sua imagem sempre será constante igual a 3, conforme visualizado no gráfico da função na Figura 2, que trata-se de uma reta paralela ao Eixo das Abscissas.

Figura 2. Gráfico da função constante $f(x) = 3$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Trabalhando com a noção do limite, mesmo neste caso, os valores de aumentam muito e as imagens permanecem com a sua imagem fixada em 3, como pode ser observada no Quadro 2, onde representamos os valores de *x* múltiplos de 10.

Quadro 2. Representação de pontos na função $f(x) = 3$, com $x \to +\infty$

x	$f(x) = 3$
10	3
100	3
1000	3
10000	3

Fonte: Da autora

Assim:

$$\lim_{x \to +\infty} 3 = 3$$

Quanto aos valores altos e com sinal negativo, o que pode ser analisado no Quadro 3 é:

Quadro 3. Representação de pontos na função $f(x) = 3$, com $x \to -\infty$

x	$f(x) = 3$
-10	3
-100	3
-1000	3
-10000	3

Fonte: Da autora

Portanto, tem-se:

$$\lim_{x \to -\infty} 3 = 3$$

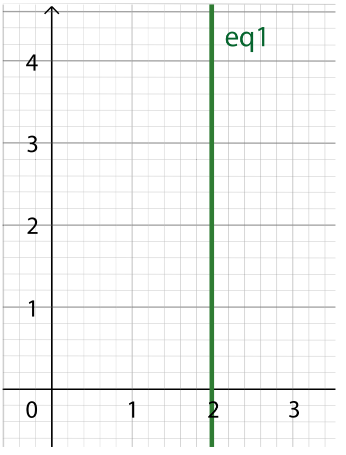
Isto mostra que a função constante, como o próprio nome já diz, não muda de comportamento no infinito, ela permanece constante até o fim. Seu traço não possui nenhum tipo de perturbação.

Observação 1: Fugindo do escopo de funções, pode-se ter algumas retas, que são designadas por $x = k$, onde $k \in \mathbb{R}$. Tais retas são paralelas ao Eixo das Ordenadas. E à frente, podem servir de auxílio para entender o comportamento de funções que apresentam Assíntotas Verticais.

Exemplo 2: Identifique o traço da reta $x = 2$.

Resolução: Como no Exemplo 1, pode-se construir uma tabela, atribuindo valores aleatórios para y. Assim, todos os pontos seriam da forma $\{(2, y); y \in \mathbb{R}\}$ conforme pode ser visto na Figura 3:

Figura 3. Traço da reta $x = 2$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

É sempre importante destacar as retas que servem de apoio para o traço do gráfico de funções. O próprio Eixo das Abscissas pode ser representado por $\{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$, ou simplesmente $y = 0$. De maneira análoga, o Eixo das Ordenadas pode ser representado por $\{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$, ou apenas $x = 0$.

1.1.1. Sinal da Função Constante

Para a verificação do Sinal da Função, basta observar se a reta paralela está acima do Eixo das Abscissas, constituindo o sinal da função todo positivo. Caso contrário, o sinal será negativo.

1.1.2. Limites no Infinito da Função Constante

Como apresentado anteriormente, a pergunta a ser feita é: Tratando-se da função constante, quando os valores de x aumentam muito, para onde convergem as imagens?

Bem, como a função é constante, as imagens não podem fugir! As imagens só podem ser a própria constante. E mesmo no caso quando os valores de x diminuem!

Neste caso, onde $f(x) = k, \forall k \in \mathbb{R}$, escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

E:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

1.1.3. Exercícios de Fixação

Agora que você já sabe identificar as retas paralelas aos eixos coordenados no plano, vamos praticar!

Para cada uma das seguintes funções ou retas, esboce seu gráfico e destaque seu sinal:

a) $f(x) = -1$

b) $f(x) = -3$

c) $f(x) = 0$

d) $f(x) = 5$

e) $x = 2$

f) $x = -4$

g) $x = 0$

h) $x = 7$

1.2. Função do 1º Grau

Definição: A Função do 1º Grau é definida pela lei $f(x) = ax + b$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$.

Assim, o seu gráfico é definido por uma reta. Caso queira entender o comportamento de tal função, através do Postulado de Euclides, basta descobrir dois pontos para que seu traço seja efetuado no plano $x0y$.

Faz-se o gráfico da Função do 1º Grau identificando os pontos, com o uso das funções constantes, e o seu ponto será exatamente a interseção das retas sobre o plano cartesiano.

Dois pontos ideais deste gráfico são: o ponto que toca o Eixo das Abscissas[1] (Eixo x), também chamado de **zero da função**, e o ponto que toca o Eixo das Ordenadas (Eixo y), ou seja, fazendo $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente, conforme o Quadro 4.

---

1 Disponível em: https://profes.com.br/felipes.rocha/blog/lancamento-obliquo-e-o-futebol.

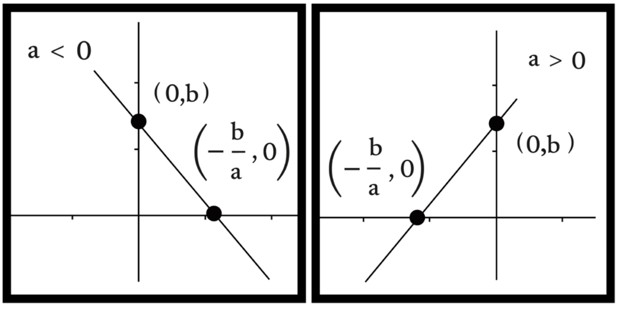
Quadro 4. Descrição dos Pontos ideais de uma Função do 1º Grau

Descrição	Abscissa do Ponto	Ordenada do Ponto
Ponto sobre o Eixo x **(Zero da Função)**	$x = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$	$y = (0, b)$
Ponto sobre o Eixo	$x = 0$	$y = b$

Fonte: Da autora

De acordo com o sinal de a na Lei da Função do 1º Grau, podemos ter a seguinte caracterização sobre a inclinação da reta, como pode ser observado na Figura 4. Lado Esquerdo: Função Decrescente, quando $a < 0$; e Lado Direito: Função Crescente, quando $a > 0$.

Figura 4. À esquerda: Reta Decrescente; À direita: Reta Crescente



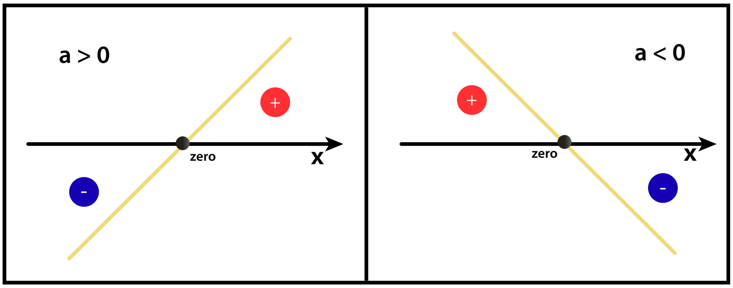
Fonte: Paint App

Observação 2: Certamente, podemos fazer uma tabela, escolhendo valores aleatórios para as abscissas das coordenadas dos pontos, realizando a conta através da Lei da Função, para descobrir as ordenadas de cada ponto.

1.2.1. Sinal da Função do 1º Grau

O sinal é um dos destaques importantes que será muito necessário nos capítulos de diferenciabilidade ou análise do sinal da função. Assim, o Sinal da Função do 1º Grau será desenvolvido à esquerda do zero da função ou à direita da função, como pode ser observado na Figura 5:

Figura 5. Sinal da função do 1º grau



Fonte: Paint App

Exemplo 2: Esboce o gráfico da função $f(x) = 2x + 4$. Identifique o sinal da função.

Resolução: Temos 3 maneiras de esboçar tal gráfico.

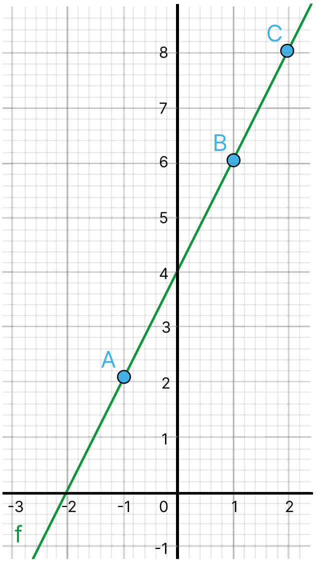
Maneira 1: Faça uma tabela, atribuindo valores aleatórios para as abscissas x, fazendo o cálculo das ordenadas. Após isso, identifica-se no plano cartesiano os pontos e trace a reta.

Quadro 5. Descrição dos Pontos aleatórios para função $f(x) = 2x + 4$

Abscissa (x)	Ordenada (y) "$f(x) = 2x + 4$"	Ponto
-1	$f(-1) = 2 * (-1) + 4 = 2$	A (-1, 2)
1	$f(1) = 2 * 1 + 4 = 6$	B (1,6)
2	$f(3) = 2 * 2 + 4 = 8$	C (2,8)

Fonte: Da autora

Figura 6. Gráfico da função $f(x) = 2x + 4$ com pontos aleatórios



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

Maneira 2: Faça um quadro, de acordo com o Quadro 6.

Quadro 6. Determinação dos Pontos ideais do Gráfico $f(x) = 2x + 4$

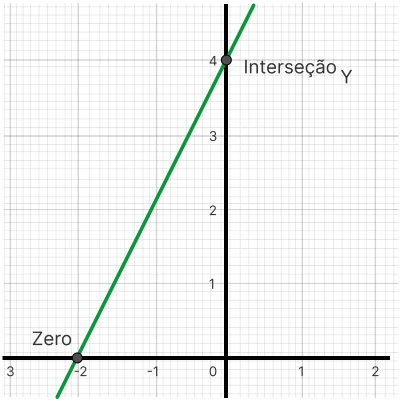
Abscissa (x)	**Ordenada (y) "$f(x) = 2x + 4$"**	**Ponto (x, y)**
0	$f(0) = 2 * 0 + 4 = 4$	(0,4)
$2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$	0	(-2, 0)

Fonte: Da autora

Lembrando que as contas em vermelho deverão ser realizadas para o descobrimento do zero da função e o ponto que toca o eixo das ordenadas.

Após isso, basta plotar os pontos ideais da função e traçar a reta, mediante o Postulado de Euclides.

Figura 7. Gráfico da função $f(x) = 2x + 4$ contendo os pontos ideais



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

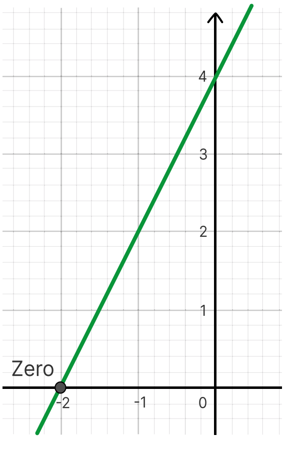
Maneira 3: Identifica-se o coeficiente angular *a* que, neste caso, $a = 2 > 0$. O que significa dizer, conforme o detalhamento da Figura 4, que a reta é crescente. Assim, é preciso descobrir apenas um único ponto ideal, que é o zero da função. Ou seja, quando $y = 0$, qual o valor de *x* que "corta" o Eixo das Abscissas?

A conta segue:

$$2x + 4 = 0 \qquad (1)$$

O que acarreta em $x = -2$. Logo, o zero da função é o ponto (-2,0), segundo o gráfico na Figura 8:

Figura 8. Gráfico da Função com verificação da condição do coeficiente angular

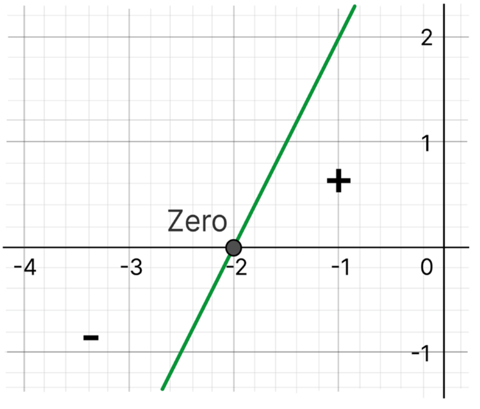


Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

Portanto, as 3 maneiras descritas anteriormente nos levam ao mesmo traço do gráfico da função. Dessas, a mais importante, depois de já obter um aperfeiçoamento da técnica do traço do gráfico, é a Maneira 3, pois pode-se traçar o gráfico sem muito esforço, identificando o ponto mais importante para o prosseguimento do estudo e análise de gráficos de funções.

Para destacar o sinal, analisa-se a Figura 9:

Figura 9. Sinal da função $f(x) = 2x + 4$



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

Assim, o sinal pode ser descrito por:

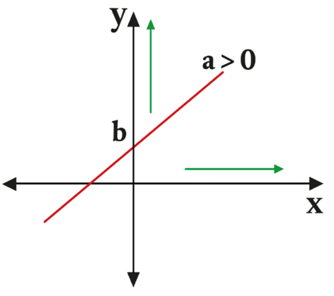
$$\begin{cases} f(x) > 0, para\ x \in (-2, +\infty) \\ f(x) < 0, para\ x \in (-\infty, +2) \end{cases}$$

1.2.2. Limites no Infinito da Função do 1º Grau

Conforme visto anteriormente, de acordo com o sinal do coeficiente a, a reta muda de inclinação.

Se tivermos uma função do 1º grau dada por $f(x) = ax + b$, com $a > 0$, a reta será crescente (Ver Figura 4 à esquerda).

Figura 10. Noção intuitiva do cálculo do Limite no Infinito



Fonte: Paint App

Logo, se os valores de *x* forem aumentando, as imagens também irão aumentar gradativamente, e vice-versa.

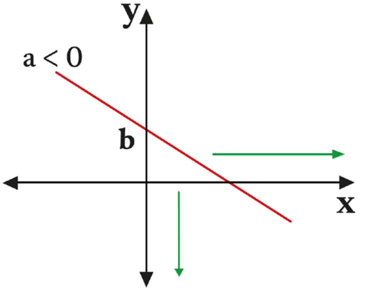
Assim:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; f(x) = ax + b, a > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; f(x) = ax + b, a > 0$$

No caso da função decrescente (Conforme Figura 11), à medida que os valores de *x* aumentam, os valores de *y* decaem. Afirmando assim que:

Figura 11. Noção intuitiva do cálculo do Limite no Infinito



Fonte: Paint App

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; f(x) = ax + b, a < 0.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; f(x) = ax + b, a < 0.$$

1.2.3. Exercícios de Fixação

Neste momento, é muito importante dar um upgrade na construção dos gráficos das funções de 1º grau, até conseguir construir mentalmente! Vamos tentar?

1. Esboce cada uma das funções do 1º grau, exibindo o cálculo da raiz da função, identificando a Maneira escolhida e destacando o sinal da função.

a) $f(x) = x$

b) $f(x) = -x + 1$

c) $f(x) = 2x - 2$

d) $f(x) = -x$

e) $f(x) = 3x - 9$

f) $f(x) = 4x + 2$

g) $f(x) = 1 + x$

1.3. Função do 2º Grau

Definição: A função do 2º grau é representada algebricamente pela função dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.

Seu gráfico é representado através de uma parábola, podendo ter concavidade voltada para cima ($a > 0$) ou concavidade voltada para baixo ($a < 0$).

Sempre pode-se apelar para a confecção de uma tabela para identificar os pontos no plano cartesiano e traçar seu gráfico. Neste caso, pode ser que demore muito tempo. Além disso, precisa-se saber dos pontos ideais. No caso para identificar os zeros da função, faz-se $y = 0$, obtendo um polinômio do 2º grau, conforme a Equação (2):

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

A Equação (2) possui dois possíveis valores que, ao serem substituídos no lugar de x, zeram a expressão.

Assim, visualizamos a famosa e conhecida "Fórmula de Bháskara", que determina as raízes do polinômio do 2º grau, através da expressão:

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \qquad (3)$$

A expressão (2) tem as seguintes situações, uma vez que Δ assume um valor real.

Quadro 7. Situação das raízes na dependência do valor do Discriminante Δ

Situação	Descrição	Raízes
$\Delta > 0$	As raízes são reais e distintas	x' e x''
$\Delta = 0$	Existe apenas uma única raiz	$x' = x''$
$\Delta < 0$	Não existe raiz real	Complexas

Fonte: Da autora

Além dos zeros, ainda temos outros pontos ideais do gráfico da função do 2º Grau, que são: o ponto que 'corta' o Eixo das Ordenadas e o Vértice da Parábola $V(X_V, Y_V)$.

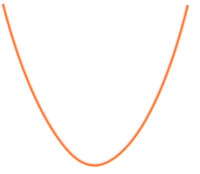
As equações para a determinação das coordenadas do vértice são dadas por:

$$\begin{cases} X_V = \dfrac{-b}{2a} \\ Y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} \end{cases} \qquad (4)$$

Portanto, temos pelo menos 5 pontos a serem destacados no gráfico de uma função do 2º Grau.

Porém, na prática, podemos simplesmente determinar as raízes, conforme a Equação (3), e analisar a concavidade da parábola:

Quadro 8. Comportamento da Concavidade mediante sinal do coeficiente

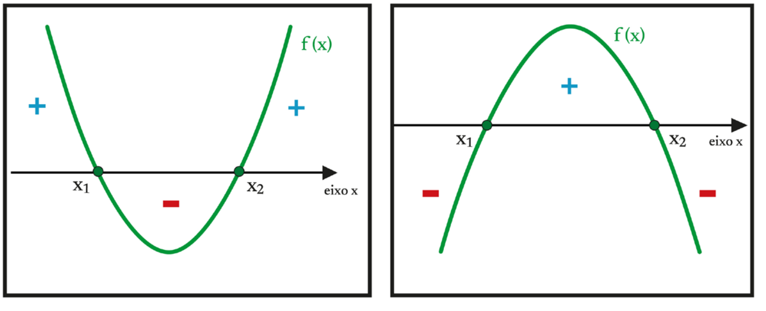
Valor do coeficiente	Comportamento do Gráfico	Visualização do Gráfico
a > 0	Concavidade voltada para cima	
a < 0	Concavidade voltada para baixo	

Fonte: Da autora

1.3.1. Sinal da Função do 2º Grau

O sinal da função do 2º grau é originado de modo semelhante aos mencionados anteriormente. Sempre que o gráfico estiver acima do Eixo das Abscissas, seu sinal será positivo e indicado pelo sinal +. A parte do gráfico que estiver abaixo do Eixo das Abscissas terá o sinal negativo e indicado pelo sinal -. Lembrando que, para descrever o sinal da função, é necessária a escrita em forma de conjunto para destacar os elementos que farão com que a função tenha o sinal requerido.

Figura 12. Sinal da função do 2º grau, sendo o discriminante positivo



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Exemplo 3: Esboce o gráfico da função quadrática $f(x) = -x^2 + 6x - 5$, identificando todos os pontos ideais da função.

Resolução: Tem-se 3 maneiras para o esboço do gráfico. A seguir, as 3 maneiras para a determinação do gráfico, de maneira decrescente, em relação ao volume de contas a serem realizadas.

Maneira 1: A partir de um quadro com pelo menos 5 pontos aleatórios, atribuindo valores para as abscissas x calcula-se, a partir da lei da função, os correspondentes valores das ordenadas de cada ponto a ser exibido no plano cartesiano.

Quadro 9. Determinação do Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ por pontos aleatórios

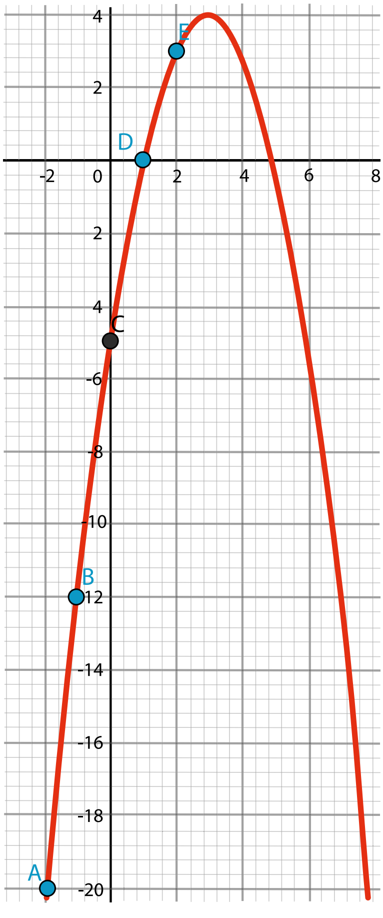
Abscissa (*x*)	**Ordenada (*y*) ‘f (*x*) = - x² + 6x - 5’**	**Ponto (*x*, *y*)**
-2	$f(-2) = -(-2)^2 + 6 * (-2) - 5 = -21$	*A* (-2, -21)
-1	$f(-1) = -(-1)^2 + 6 * (-1) - 5 = -12$	*B* (-1, -12)
0	$f(0) = -0^2 + 6 * 0 - 5 = -5$	*C* (0, -5)
1	$f(1) = -1^2 + 6 * 1 - 5 = 0$	*D* (1,0)
2	$f(2) = -2^2 + 6 * 2 - 5 = 3$	*E* (2,3)

Fonte: Da autora

Percebe-se que, desses pontos, apenas um deles, que é o ponto *D*, carrega uma informação importante, pois ele é um dos zeros da função, ou seja, ele ‘corta’ o eixo das abscissas. Porém, neste caso, não é o único.

Então, essa maneira se torna inviável para a determinação do gráfico, mas não imprecisa. Pois, mesmo diante de muitos cálculos, pode-se determinar o gráfico da função.

Figura 13. Determinação do gráfico da função $f(x) = -x^2 - 6x + 5$ por pontos aleatórios



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

Observação 3: Percebe-se que, mesmo atribuindo 5 valores para as abscissas, não foi o suficiente para a determinação total da parábola. Assim, teria que continuar o Quadro para encontrar a 2ª raiz da função.

Maneira 2: Determinação dos pontos ideais da função quadrática. Assim, precisa-se encontrar os Zeros da Função. Para isto, faz-se $y = 0$. E temos uma equação do 2º Grau:

$$-x^2 + 6x - 5 = 0 \qquad (5)$$

Para resolver a equação (5), aplica-se a Fórmula de Bháskara (Equação (3)):

$$\begin{cases} \Delta = 6^2 - 4(-1)(-5) = 16 > 0 \\ x = \dfrac{-6 \pm 4}{2(-1)} \end{cases}$$

Donde obtém-se $x' = 1$ e $x'' = 5$. Ou seja, os pontos: A (1,0) e B (5,0).

Caso o leitor tenha praticidade, pode utilizar o Método da Soma e Produto das Raízes, descrito por:

$$\begin{cases} S = \dfrac{-b}{a} \\ P = \dfrac{c}{a} \end{cases} \qquad (6)$$

O próximo ponto é o ponto que ‘corta’ o eixo das ordenadas. Para isto, faz-se $x = 0$.

$$f(0) = -0^2 + 6x - 5 = -5$$

Destaca-se o ponto sobre o eixo das ordenadas:

C (0, -5)

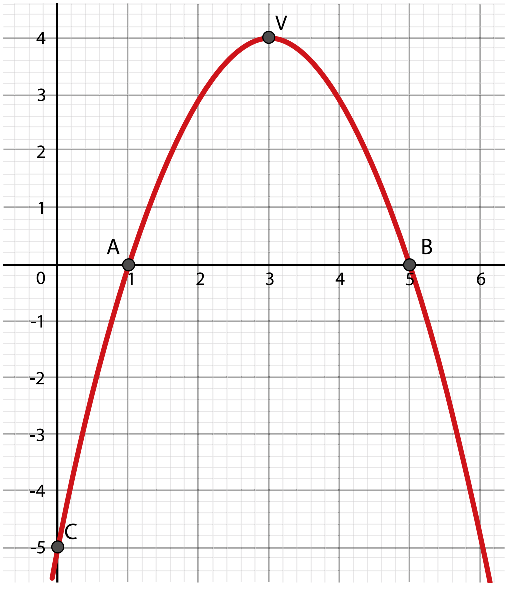
Por último, a determinação do Vértice da Parábola:

$$\begin{cases} X_V = \dfrac{-6}{2(-1)} = 3 \\ Y_V = \dfrac{-16}{4(-1)} = 4 \end{cases}$$

Assim, o vértice é o ponto V (3,4).

Destacando todos os 4 pontos sobre o plano cartesiano, obtemos a Figura 14.

Figura 14. Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ com destaque dos pontos ideais



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

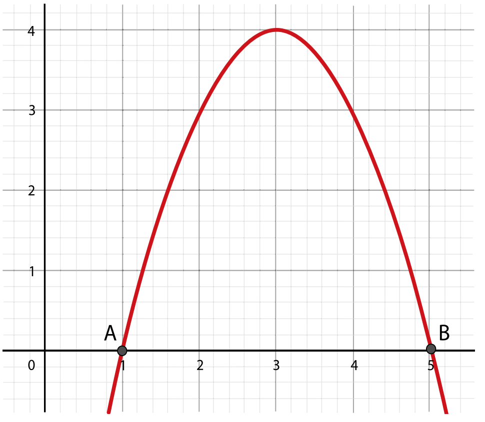
Maneira 3: Verificar o coeficiente *a*, conforme o Quadro 6, para determinar a concavidade. O cálculo a ser realizado é apenas para a determinação das raízes, feito pela Fórmula de Bháskara ou pelo Método da Soma e Produto das Raízes.

Pelo último método, de acordo com a equação (6), temos:

$$\begin{cases} S = -\dfrac{6}{-1} = 6 \\ P = \dfrac{-5}{-1} = 5 \end{cases}$$

As raízes somadas dão 6, e estas mesmas multiplicadas dão 5. Logo, as raízes são 1 e 5 (Mediante cálculo anterior, a resposta confere!).

Figura 15. Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ mediante concavidade da parábola



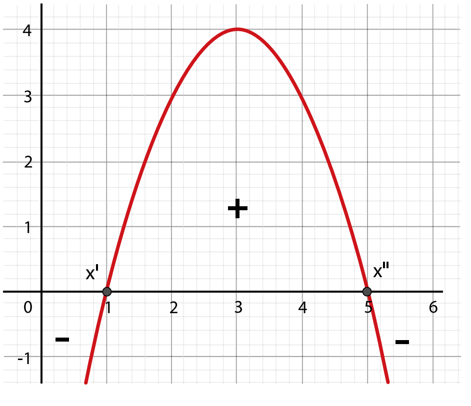
Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

Observação 4: De maneira bem mais rápida, a Maneira 3 de executar o traço do gráfico é bem mais eficaz. Em alguns casos, quando o discriminante, por exemplo, for negativo, o gráfico não irá tocar o eixo dos *x*. Portanto, a partir da concavidade, o vértice será de suma importância.

De qualquer maneira que o leitor optar em esboçar o gráfico de uma função do 2º grau, o resultado é o mesmo. Mas, sempre é melhor não perder muito tempo, pois o objetivo é ganhar praticidade com esses gráficos mais simples, para mais adiante conseguir construir uma base sobre a análise de tais gráficos, a fim de desvendar ou entender gráficos mais elaborados e com restrições.

Para a determinação do Sinal, basta analisar o gráfico, em termos dos zeros da função.

Figura 16. Sinal da função $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

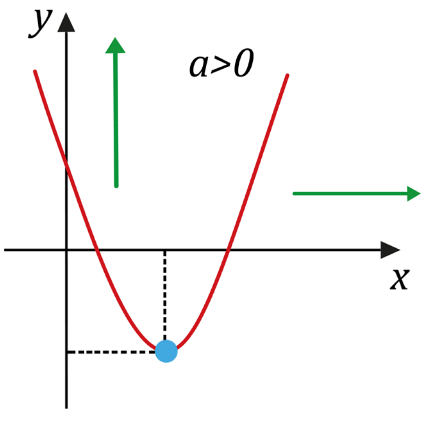
Assim, o sinal pode ser analisado da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f(x) > 0, para\ x \in (1{,}5) \\ f(x) < 0, para\ x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty) \end{cases}$$

1.3.2. Limites no Infinito da Função Quadrática

Ao analisarmos, primeiramente, a função do 2º grau com $a > 0$, podemos observar que, à medida que se aumenta o valor de x, suas respectivas imagens aumentam até mais rápido (Ver Figura 17).

Figura 17. Análise do Limite no Infinito da função do 2º grau



Fonte: Paint App

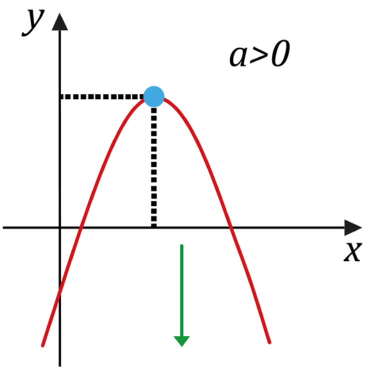
E de outra vertente, quando os valores de x diminuem, as imagens continuam aumentando.

Logo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty; f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$$

Já no caso da função do 2º grau com $a < 0$ (Ver Figura 18).

Figura 18. Análise do Limite no infinito da função do 2º grau



Fonte: Paint App

Assim, os limites:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty; f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty; f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$$

1.3.3. Exercícios de Fixação

Chegou a hora de praticar o que foi estudado! Tente não perder muito tempo na execução dos gráficos solicitados abaixo.

1. Plote os gráficos no plano cartesiano de cada uma das seguintes funções quadráticas, destacando os pontos ideais de cada um deles.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 - 3x = 2$

c) $f(x) = -x^2 + 4$

d) $f(x) = 2x^2 - 4$

e) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$

f) $f(x) = -x^2$

g) $f(x) = x^2 + 1$

h) $f(x) = -x^2 + x$

i) $f(x) = 4x^2 - 7x + 2$

1.4. Função do 3º Grau

Nesta sessão, veremos o melhor dos casos para a determinação das raízes da função do 3º grau. Porém, em muitos casos, serão necessárias ferramentas diferenciais para verificar o comportamento do gráfico, que será visto mais adiante.

Definição: A função do 3º grau é definida pela Lei dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, sendo $a \neq 0$.

Para determinar os zeros da função, faz-se $y = 0$. Então, encontra-se um polinômio do 3º grau. Aqui, será visto o Método de Redução de grau do polinômio através do Método de Briof-Ruffini. Tal método consiste em descobrir uma das raízes do polinômio por tentativa e erro, a partir dos divisores de $\frac{d}{a}$, em módulo.

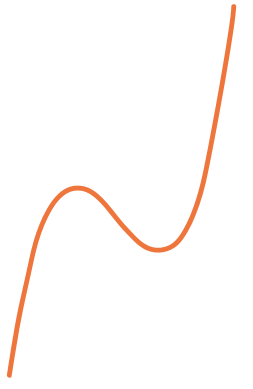
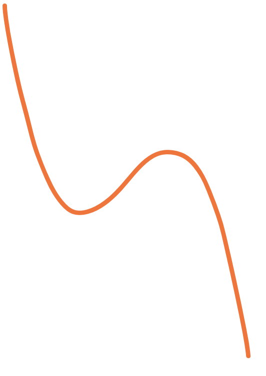
Depois, o método consiste em fazer uma cruzada, da maneira seguinte:

Raiz	***a***	***b***	***c***	***d***
	a	$\underbrace{a\text{*Raiz} + b}_{\text{B}}$	$\underbrace{\text{B*Raiz} + c}_{\text{C}}$	C*Raiz + d

O intuito é que a última operação se anule, e assim, os coeficientes calculados serão do polinômio de grau 2.

Novamente, observa-se o coeficiente a para verificar a sinuosidade da curva, conforme o Quadro 10.

Quadro 10. Comportamento e Situação do gráfico da função do 3º grau

Coeficiente	**Comportamento**	**Situação do Gráfico**
$a > 0$	Crescente	
$a < 0$	Decrescente	

Fonte: Da autora

Outro ponto ideal a ser destacado é o ponto que 'corta' o eixo das ordenadas, ou seja, faz-se $x = 0$.

O sinal da função se apresenta com sinal positivo para a parte do gráfico acima do Eixo das Abscissas, e com sinal negativo para a parte do gráfico abaixo do Eixo das Abscissas.

Exemplo 4: Esboce o gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, destacando os seus pontos ideais. Analise o sinal da função.

Resolução: Para tal esboço, é preciso descobrir as raízes da função, i.e, $y = 0$. Donde se obtém o polinômio $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$. Os divisores de $\frac{-1}{1}$ em módulo são: 1 e -1.

Faça o teste: $f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 3(1) - 1 = 0$. Encontramos a raiz!

Agora o método de Briof-Ruffini:

1	1	-3	3	-1
	1	-2	1	0

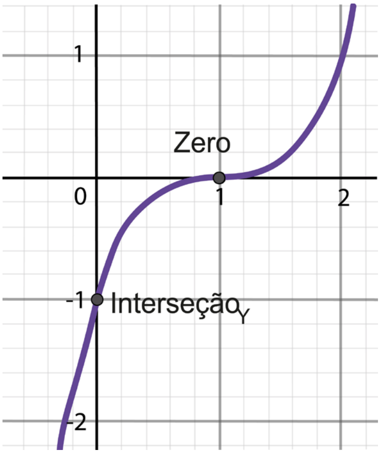
Logo, o polinômio reduzido é $x^2 - 2x + 1 = 0$, cuja soma das raízes é 2 e o produto igual a 1. Portanto, as raízes são iguais a 1.

Assim, o polinômio tem três raízes iguais a 1. O polinômio pode ser reduzido a $(x - 1)^3$.

Tendo em vista que $a > 0$, a sinuosidade da curva é crescente.

O ponto que 'corta' o eixo das ordenadas é $f(0) = 0^3 - 3(0) + 3(0) - 1 = -1$, i.e, (0, -1), como pode ser visualizado na Figura 10:

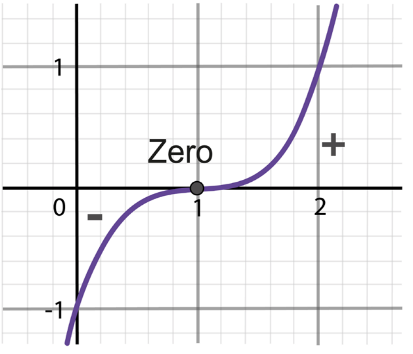
Figura 19. Gráfico da $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, destacando os pontos ideais



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

O sinal da função será dado a partir do zero da função que, neste caso, só existe um!

Figura 20. Sinal da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Assim, o sinal pode ser descrito por:

$$\begin{cases} f(x) > 0, para\ x > 1 \\ f(x) < 0, para\ x < 1 \end{cases}$$

1.4.1. Limites da Função Cúbica

O comportamento da função cúbica no infinito é bem parecido com a função do 1º grau, ou seja, vai depender se a função for crescente ($a > 0$) ou decrescente ($a < 0$), de acordo com o Quadro 10. Assim, seus limites no infinito serão descritos por:

$$\lim_{x \to +\infty} ax^3 + bx + c = +\infty, a > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} ax^3 + bx + c = -\infty, a > 0$$

Ou, de modo análogo:

$$\lim_{x \to +\infty} ax^3 + bx + c = -\infty, a < 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} ax^3 + bx + c = +\infty, a < 0$$

1.4.2. Exercícios de Fixação

Vamos praticar a leitura dos gráficos de funções do 3º grau. Lembre-se que a prática leva à perfeição! Não perca o foco!

1. Para cada uma das seguintes funções, exiba seu gráfico e destaque os pontos ideais.

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

c) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$

d) $f(x) = -x^3$

e) $f(x) = -2x^3 + 4x$

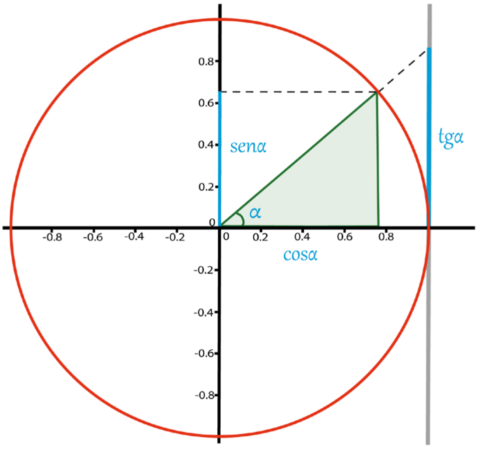
f) $f(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$

g) $f(x) = x^3 - 8$

1.5. Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas têm uma particularidade muito importante: ao invés de trabalharmos com números reais em si, elas atuam sobre ângulos. Para isso, é necessário conhecer os ângulos notáveis. Aqui, tais ângulos serão realizados por meio do Ciclo Trigonométrico, que consiste em traçar uma circunferência de raio 1, centrada na origem, onde o Eixo das Abscissas será identificado com o Eixo dos Cossenos e o Eixo das Ordenadas será identificado com o eixo dos Senos, como ilustrado na Figura 21.

Figura 21. Identificação dos Eixos a partir do Triângulo Retângulo

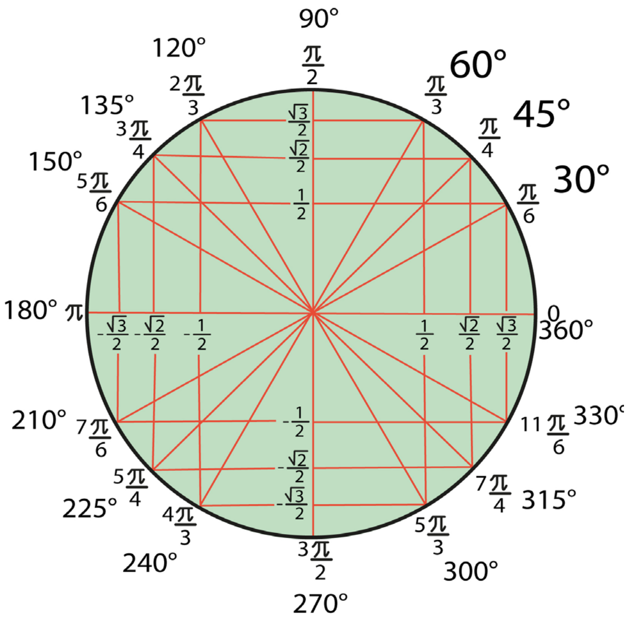


Fonte: Vitor Nunes, 2025[1]

Em cada quadrante, que são 4, identificados no sentido anti-horário, se destacarão 3 pontos sobre cada um, juntamente com os pontos sobre os eixos coordenados.

1 Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/circulo-trigonometrico.php

Figura 22. Ciclo Trigonométrico



Fonte: Dia a Dia Educação[2]

Assim, haverá 16 pontos sobre tal circunferência, como na Figura 22. Começa-se no ponto sobre o eixo , no 1º quadrante, com o valor de 0º, seguindo a legenda para destacar todos os outros pontos:

Quadro 11. Identificação em Graus de cada um dos pontos no Ciclo Trigonométrico

Situação	Somar:
Ponto sobre Eixo para Ponto sobre o Quadrante	30º
Ponto sobre o Quadrante para Ponto sobre o Quadrante	15º

Fonte: Da autora

2 Disponível em: https://images.app.goo.gl/EvrSiuUJKuXhHVgT6.

Começando em 0 graus e terminando numa volta completa sobre o ciclo, teremos 360 graus. Lembrando que o mais solicitado é transformar cada um dos ângulos para π radianos, fazendo a regra de três simples:

$$\pi \text{ ------- } 180^o$$
$$x \text{ ------- } \hat{A}ngulo$$

Desta forma, obtêm-se os ângulos em radianos, destacados na Figura 22.

Esta não é a única maneira de evidenciar os ângulos, pode-se fazer a tabela dos ângulos notáveis no 1º quadrante: 30º, 45º e 60º, e fazer redução de quadrantes, mas ainda assim, serão necessários os ângulos sobre os eixos coordenados.

De posse dos valores dos senos e cossenos dos ângulos notáveis, pode-se construir o traço do gráfico das funções trigonométricas.

Exemplo 5: Construa o gráfico da função $f(x) = senx$, chamado de Senóide.

Resolução: Apela-se à construção do gráfico feito através de um quadro, colocando os ângulos notáveis do ciclo trigonométrico.

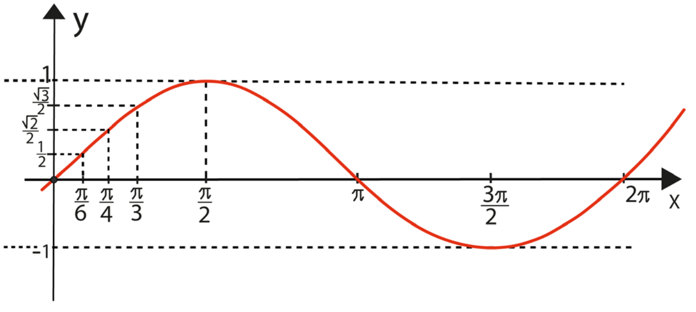
Quadro 12. Pontos sobre a Curva Senóide

x **‘π radianos’**	y **‘$f(x)= senx$’**	**Ponto (x, y)**
0	$sen\,0 = 0$	(0,0)
$\frac{\pi}{6}$	$sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$sen\frac{\pi}{2} = 0$	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

Fonte: Da autora

Para verificar a sinuosidade da curva, pode-se atribuir mais ângulos, de maneira crescente. No gráfico, contido na Figura 23, os ângulos foram colocados sobre os eixos coordenados. Mas, nada impede de você atribuir os ângulos sobre cada quadrante.

Figura 23. Gráfico da função Seno - Senóide

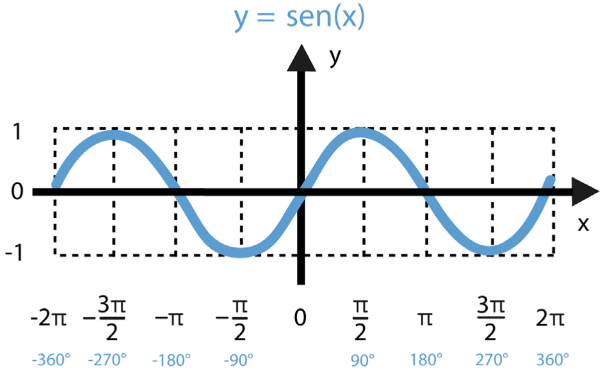


Fonte: Sala de aula, 2020

Como pode-se perceber, a função Senóide possui um comportamento cíclico e sua imagem é compreendida no intervalo [-1, 1], o que diz que a função é limitada.

E para a esquerda, também é possível descrever o mesmo movimento. Lembrando que a função seno é uma função ímpar, i.e, $f(-x) = -f(x)$. Pode-se atribuir ângulos com sinal negativo. Como pode ser detalhado na Figura 24:

Figura 24. Gráfico da função $f(x) = sen\, x$ com $x \in [-2\pi, 2\pi]$



Fonte: Raul Rodrigues de Oliveira

1.5.1. Exercícios de Fixação

Tendo em mãos o Ciclo Trigonométrico e sabendo como é definida a função trigonométrica, podemos construir facilmente os seus gráficos!

1. Construa o gráfico de cada uma das funções trigonométricas a seguir:

a) $f(x) = \cos x$	'Cosssenóide'
b) $f(x) = \tan x$	'Tangenóide'
c) $f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$	'Secante'
d) $f(x) = \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$	'Cossecante'

Dica: Nas duas últimas funções, o cuidado deve ser em relação ao domínio da função, pois é preciso restringir os pontos onde o denominador se anula!

1.6. Função Exponencial

A função exponencial é muito utilizada no meio da Economia, pois comenta-se bastante o dito crescimento exponencial.

Tanto a função exponencial quanto a função logarítmica (a ser estudada na próxima sessão) levam em consideração as operações de potenciação.

Relembre algumas das definições e propriedades principais de potenciação:

Definição: Dizemos que a^n é a potência da base a elevado a um expoente n, onde $a, n \in \mathbb{R}$. E é calculada por:

$$a^n = \underbrace{a.a \ldots a}_{\text{n vezes}}$$

Propriedades: Sejam $m, n \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Então valem:

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^0 = 1$$

$a^m = a^n \Rightarrow m = n$ ‘Equação Exponencial’

$a^m = b^m \Rightarrow a = b$ ‘Modulações da Equação Exponencial’

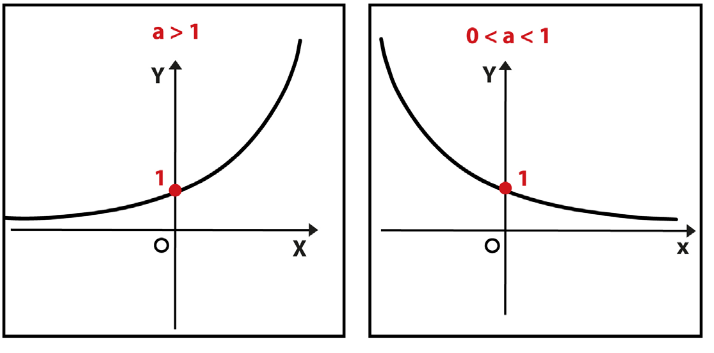
Definição: A função exponencial é dada pela lei $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Só lembrando que quando $a < 0$, descontinuidade dos pontos e, portanto, não categorizaria uma função contínua.

De acordo com a definição, a Imagem da função exponencial é sempre positiva.

O comportamento da função exponencial se dará em termos do valor de *a*, como pode ser observado na figura a seguir.

Figura 25. À esquerda: Função Exponencial crescente. À direita: Função Exponencial decrescente



Fonte: Paint App

Exemplo 6: Construa o gráfico da função $f(x) = 3^x$.

Resolução: Para melhor entendimento, faremos uso de um quadro, tomando valores aleatórios para as abscissas, tendo que calcular a imagem de cada um.

Uma vez que não há restrição para os valores de *x*, tomaremos exemplares negativos, nulo e positivos.

Quadro 13. Pontos sobre o traço do gráfico da Função Exponencial

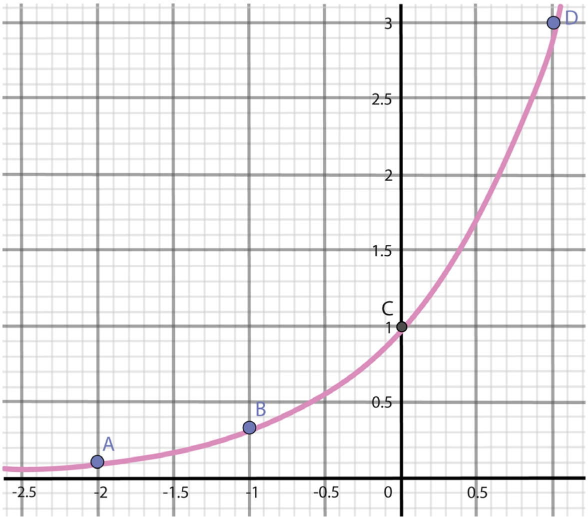
x	*y* '$f(x) = 3^x$'	**Ponto** ***(x, y)***
-2	$f(-2) = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$	$A\left(-2, \frac{1}{9}\right)$
-1	$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$	$B\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
0	$f(0) = 3^0 = 1$	$C\,(0{,}1)$
1	$f(1) = 3^1 = 3$	$D\,(1{,}3)$

Fonte: Da autora

Os pontos dispostos no Quadro 13 podem ser observados na Figura 26. De acordo com o que se pode visualizar, à medida que os valores de *x* aumentam, as suas respectivas imagens aumentam “explosivamente”. E daí, já podemos nos certificar de que:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty, a > 1$$

Figura 26. Gráfico da Função Exponencial



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Já quando x toma valores cada vez menores, as suas respectivas imagens (olhe para o Eixo das Ordenadas) estão cada vez mais próximas do zero.

$$\underset{x \to -\infty}{Lim} a^x = 0, 0 < a < 1$$

Entretanto, um detalhe importante sobre a Função Exponencial é que o gráfico não toca o Eixo das Abscissas. Por isso, a importância do Limite é sempre uma aproximação!

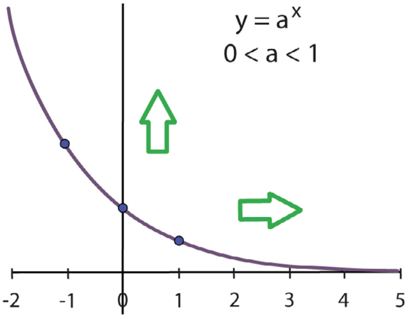
No caso da Função Exponencial $f(x) = a^x, 0 < x < 1$, a função se torna decrescente e os limites, consequentemente, mudam:

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0, 0 < a < 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty, 0 < a < 1$$

Tais observações podem ser visualizadas na Figura 27.

Figura 27. Análise do Comportamento da Função Exponencial Decrescente



Fonte: Paint App

1.6.1. Exercícios de Fixação

Agora, você precisa praticar! Faça uma tabela com valores aleatórios, para traçar o gráfico das funções exponenciais. Não se esqueça de usar, sempre que necessário, as propriedades de potenciação.

1. Para cada uma das seguintes funções exponenciais, trace o seu respectivo gráfico.

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

b) $f(x) = 2^x$

c) $f(x) = e^x;\ e \cong 2{,}7$

d) $f(x) = e^{-x};\ e \cong 2{,}7$

e) $f(x) = 5^x$

f) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

1.7. Função Logarítmica

A Função Logarítmica é a função inversa da Função Exponencial. Da mesma maneira, é muito utilizada na modelagem de situações presentes na Indústria e Equações Diferenciais Ordinárias.

Para melhorar o entendimento de tal função, é necessário relembrar conceitos e propriedades a respeito do Logaritmo.

Definição: O logaritmo é definido através da equação:

$$log_b a = c \qquad (7)$$

Onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a, b > 0$ e $b \neq 1$.

Notação: a o Logaritmando; b a base e c o Logaritmo.

A equação (7) acontece se, e somente se, b^c. Ou seja, o Logaritmo acaba se tornando uma equação exponencial.

De acordo com as propriedades de potenciação e pela própria definição de Logaritmo, pode-se comprovar as Propriedades de Logaritmo.

Propriedades de Logaritmo: Sejam $a, b, c > 0$ com $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Então são válidas:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a b.c$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a b^n = n.\log_a b$$

$$\log_{a^n} b = \frac{1}{n}.\log_a b$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a 1 = 1$$

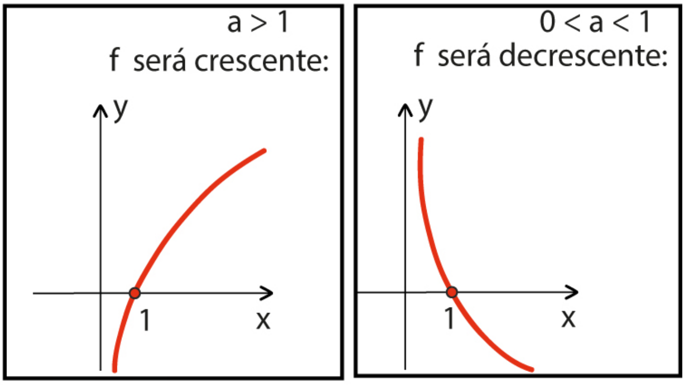
$$a^{\log_a b} = b$$

Com as propriedades, fica muito mais rápido construir o quadro com valores positivos aleatórios para x e calcular suas respectivas imagens.

Definição: A função logarítmica é definida no conjunto dos números reais positivos, tomando valores reais, cuja lei é dada por $f(x) = log_a x$, sendo $a > 0$ e $a \neq 1$.

A base terá um papel importantíssimo sobre a orientação do gráfico. Como pode ser observado na Figura 28:

Figura 28. Situação do gráfico da Função Logarítmica dependendo da base



Fonte: Paint App

De acordo com a análise do gráfico da função, lado esquerdo da Figura 27, pode-se destacar que, à medida que o x aumenta, o valor de y também aumenta. O que nos diz que:

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = +\infty, a > 1, x > 1$$

E que:

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = -\infty, a > 1, 0 < x < 1$$

Ao mesmo tempo que, do lado esquerdo da Figura 27, onde $0 < a < 1$, onde o comportamento da função é decrescente, os limites no infinito se descrevem por:

$$\lim_{x \to +\infty} log_a x = -\infty, 0 < a < 1, x > 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} log_a x = +\infty, 0 < a < 1, 0 < x < 1$$

Observação 5: Mesmo a restrição para o logaritmando ser sempre positiva, a imagem não terá impedimento de assumir valores negativos. Isso porque para valores de x com expoente negativo, e usando a propriedade iii) de Logaritmo, temos, assim, um número negativo. No exemplo, este fato ficará mais claro!

Exemplo 7: Construa o gráfico da função $f(x) = log_3\, x$.

Resolução: Para a construção dos pontos do gráfico da função, realizaremos um quadro, atribuindo valores positivos, destacando valores maiores que 1 e os que estão entre 0 e 1, e ainda múltiplos de 3, pois, assim, pode-se utilizar as propriedades de Logaritmo.

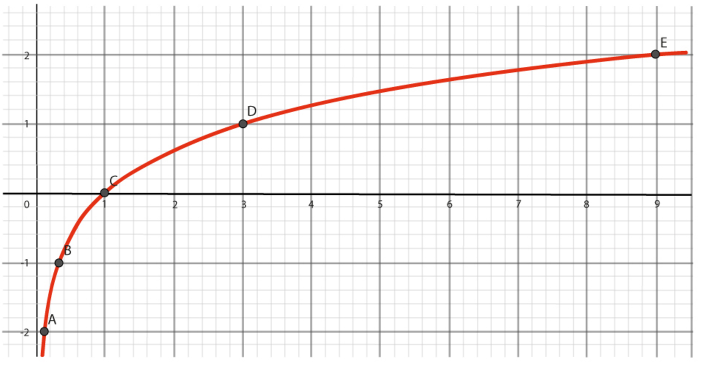
Quadro 14. Pontos da Função Logarítmica com *a* > 0

x	***y*** ‘$f(\mathrm{x}) = \log_3 \mathrm{x}$’	**Ponto (*x*, *y*)**
$\frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$	$\left(\frac{1}{9}, -2\right)$
$\frac{1}{3}$	$\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$	$\left(\frac{1}{3}, -1\right)$
1	$\log_3 1 = \log_3 3^0 = 0$	$(1,0)$
3	$\log_3 3 = 1$	$(3,1)$
9	$\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$	$(9,2)$

Fonte: Excel, 2007

Seguem, em destaque na Figura 29, os pontos sobre o gráfico da Função Logarítmica:

Figura 29. Gráfico da Função Logarítmica com *a* > 0



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

1.7.1. Exercícios de Fixação

Não perca o foco e tente fazer os exercícios com o auxílio de um quadro/tabela com valores pré-dispostos para as abscissas, atentando-se para o uso de escolhas com multiplicidade, a fim de utilizar as propriedades, as quais facilitam o processo do cálculo das imagens.

1. Esboce os gráficos de cada uma das seguintes funções, colocando as suas observações a respeito dos limites no infinito.

$f(x) = lnx$ (Quando se usa o ln que significa logaritmo neperiano ou natural, a base é e, $e, e \cong 2{,}7$)

$f(x) = logx$ (Quando não se identifica a base no log é porque sua base é 10)

a) $f(x) = log_{\frac{1}{3}} x$

b) $f(x) = log_5 x$

c) $f(x) = log_{\frac{1}{5}} x$

1.8. Funções Inversas

As funções inversas, muitas das vezes, causam um certo temor, mas basta que a definição esteja clara para que possamos construí-las.

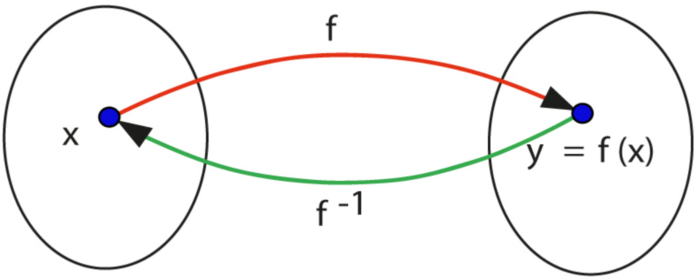
Observação 6: Em alguns casos, usando as operações mutuamente inversas como: Soma - Subtração; Multiplicação - Divisão; Potência – Raiz; e Exponencial - Logaritmo, já é possível ter uma ideia da função inversa, mas é preciso se atentar para a definição.

Definição: Seja f uma função real, então dizemos que f^{-1} é a inversa de f, se cumprir as seguintes condições:

f é uma bijeção;
$Im(\mathrm{f}) = CD(\mathrm{f}^{-1})$;
$f \circ \mathrm{f}^{-1} = Id$; Id é a função Identidade ($Id(\mathrm{x}) = x$).

Observação 7: É importante lembrar o que é uma função bijetora! Uma função bijetora, antes de tudo, precisa ser uma função injetora, ou seja, todo elemento da imagem possui um único correspondente no domínio. Isso significa que elementos diferentes no conjunto A precisam estar associados a elementos diferentes no conjunto B, ou seja, não pode haver dois ou mais elementos do conjunto A que possuem o mesmo correspondente no conjunto B[3]. Isto nos diz que sempre teremos que restringir a função para que ela se torne uma bijeção. Muitas das vezes, no caso de funções cíclicas, como as funções trigonométricas, usamos apenas um intervalo da reta que representa um período. Assim, não se fere a condição de bijeção da função.

Figura 30. Esquema em termos de Diagrama de Venn da Função Inversa



Fonte: Raul Rodrigues de Oliveira[4]

Exemplo 8: Determine a função inversa de $f(x) = senx$ e construa o gráfico da função inversa, a qual se chama *Arcoseno*.

Resolução: Primeiramente, deve-se observar que a função seno possui um período de 2π, ou seja, uma volta de 360° no ciclo trigonométrico. Logo, este intervalo pode ser escolhido de $[0,2\pi]$ ou de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Na maioria dos livros didáticos, é escolhida a segunda opção, a qual será dada preferência.

3 Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-inversa.htm
4 Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-inversa.htm

Então, agora a função seno será dada por $sen\colon \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$, de maneira que estamos associando a um ângulo compreendido entre $-\frac{\pi}{2}$ a , um número que corresponde ao seno do ângulo escolhido. Assim, a função inversa, *asen*, deverá associar a um número exatamente o ângulo cujo seno de tal ângulo dê esse número.

Então, já se sabe que a função arcoseno será definida de maneira única como: $asen\colon [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Lembrando que sempre associaremos os valores compreendidos dentro do Ciclo Trigonométrico (Ver Figura 22).

Faremos a construção do Quadro, para assim colocá-los no plano cartesiano e traçar seu respectivo gráfico. Atente-se para o seguinte fato: a função seno é ímpar, i.e, $f(-x) = -f(x)$, logo, a função arcoseno também será!

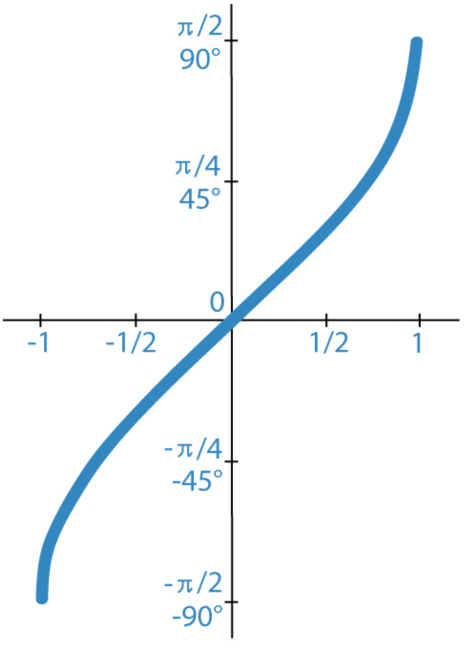
Quadro 15. Pontos sobre o gráfico da Função Arcoseno

x	***y*** ***'f (x) asen(x)'***	**Ponto *(x, y)***
-1	$asen(-1) = -\frac{\pi}{2}$	$\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$asen\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\pi}{6}\right)$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$asen\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$
$-\frac{1}{2}$	$asen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$	$\left(-\frac{1}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$
0	$asen(0) = 0$	$(0,0)$
$\frac{1}{2}$	$asen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\pi}{3}\right)$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$asen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}\right)$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$asen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\pi}{6}\right)$
1	$asen(1) = \frac{\pi}{2}$	$\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$

Fonte: Da autora

Assim, no plano cartesiano dos pontos do Quadro 15, obtemos o gráfico da Função (Ver Figura 31), de maneira que a composição *asen*(sen*x*) = x.

Figura 31. Gráfico da Função Arcoseno

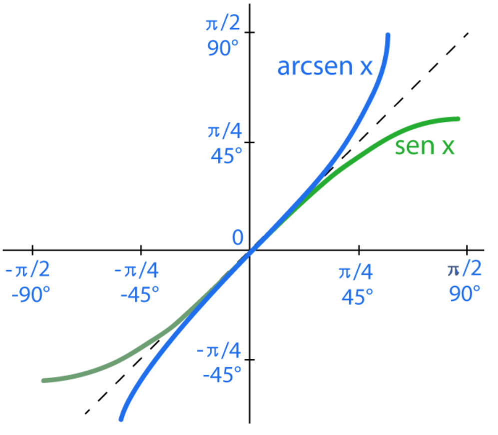


Fonte: Universo Fórmulas[5]

Visualizando o gráfico, percebe-se como realmente se espelha o gráfico da função seno em relação à função *Id*, a qual é a reta $y = x$.

5 Disponível em: https://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/arcoseno/

Figura 32. Gráfico das Funções: Arcoseno (▬), Identidade (---) e Seno (▬)



Fonte: Universo Fórmulas[6]

1.8.1. Exercícios de Fixação

Agora você consegue ter atenção aos detalhes para descrever a função inversa. Sempre tenha em mente que é natural a restrição da função para que ela se torne biunívoca! Ao usar as operações inversas, só não esqueça de restringir a função inversa depois, conforme o que foi mencionado na Observação 7.

1. Construa o gráfico das funções inversas de cada uma das funções, explicitando os conjuntos de entrada ($D(f)$) e de saída da função ($CD(f)$), em relação à função inversa.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = e^x$ (Com $e \cong 2{,}7$)

c) $f(x) = log_3 x$

d) $f(x) = cos\, x$ (A função inversa da função Cosseno é conhecida como Arcosseno)

e) $f(x) = 2x + 1$ (Usar a Propriedade ii) de Função Inversa)

f) $f(x) = -x + 3$ (Usar a Propriedade ii) de Função Inversa)

---

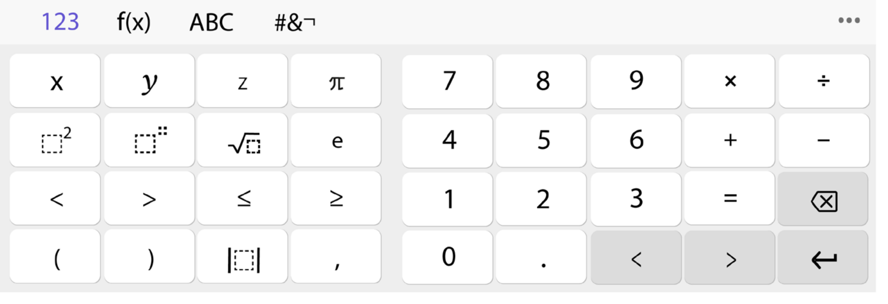
6 Disponível em: https://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/arcoseno/

1.9. Construção de Gráficos utilizando o software GeoGebra

O software GeoGebra é bem simples de ser instalado no celular, através da procura no App - Suíte GeoGebra. O uso da memória do celular é bem baixa e permite utilizar a maior parte dos comandos que irá ser utilizado neste estudo. Também pode ser usado off-line, através do link: https://www.geogebra.org/classic, no qual é permitido visualizar os gráficos das funções vistas neste capítulo.

As operações utilizam a linguagem C^+, porém, atualmente, pode-se utilizar o teclado com as principais funções utilizadas, como na Figura 32, a seguir.

Figura 33. Teclado Virtual na plataforma on-line do software GeoGebra



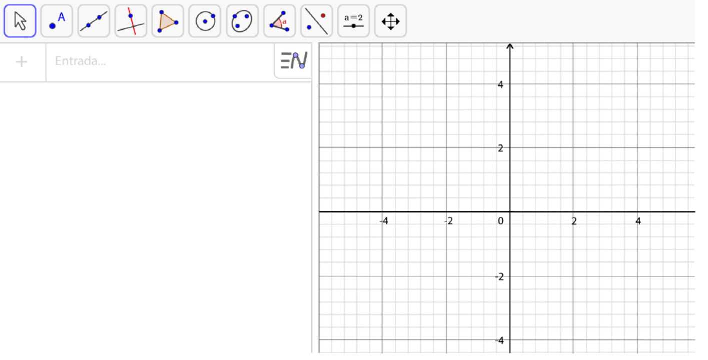
Fonte: App Suíte GeoGebra[7]

As janelas e ferramentas estão explicitadas na Figura 34, na qual é possível identificar, à direita, o plano cartesiano, contendo os eixos coordenados: horizontal - Eixo das Abscissas (x) e vertical - Eixo das Ordenadas (y). À esquerda, é possível identificar a barra de ferramentas, onde possui botões pré-dispostos, contendo botões para mover, inserir pontos e outras ferramentas com possibilidades de inserir retas, vetores, polígonos, entre outros.

E logo abaixo da barra de ferramentas, na barra de ENTRADA, pode-se inserir diretamente a expressão que identifica a função. Neste passo, é importante ressaltar que todas as atribuições vistas nas disciplinas bases de cálculo e de álgebra linear são preservadas, como, por exemplo, a função de ser expressa por uma letra minúscula, variáveis expressas por letras minúsculas, ponto expresso por letras maiúsculas, onde suas coordenadas são inseridas por meio de parênteses, e, assim por diante, no caso de matrizes por letras maiúsculas.

7 Disponível em: https://www.geogebra.org/classic

Figura 34. Pré-disposição das Janelas no software GeoGebra

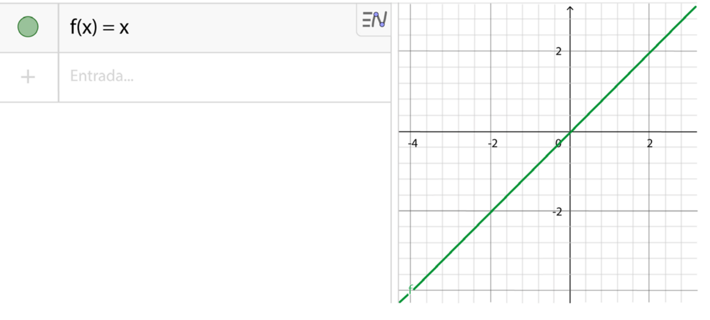


Fonte: App Suíte GeoGebra[8]

Colocando, por exemplo, a variável x na ENTRADA, automaticamente o software entende que é uma função $f(x) = x$. E no plano cartesiano, já é possível ser visto o traço do gráfico da função. Com o ENTER no teclado, se efetiva a função, onde aparecerá, na Janela de Álgebra, sua identificação.

Na verdade, na Janela de Álgebra, onde se identifica a função, tem uma bolinha que pode ser acionada ou desativada, simplesmente clicando em cima da mesma. Isso possibilita trabalhar com vários gráficos sobre o mesmo plano alternadamente.

Figura 35. Visualização da Janela de Álgebra (Lado Esquerdo) e gráfico da função no plano cartesiano (Lado Direito)



Fonte: App Suíte GeoGebra[9]

8 Disponível em: https://www.geogebra.org/classic

9 Disponível em: https://www.geogebra.org/classic

1.8.1. Exercícios de Fixação

No software GeoGebra, temos muita facilidade de fazer o traço de qualquer função desejada, seja ela uma função do 1º, 2º e 3º grau, exponencial, logarítmica, trigonométrica ou inversa. Então, para exercitar, execute o traço de todas as funções colocadas como exercício de fixação das sessões anteriores e confira se os cálculos foram realizados corretamente.

Para fazer essa conferência, pode se colocar, após o gráfico já desenhado no plano cartesiano, na ENTRADA, o ponto identificado por suas coordenadas. Por exemplo, na Figura 35, temos plotado o gráfico da função $f(x)= x$. Então, em caso de requirir a imagem do ponto de abscissa 2, é só colocar na ENTRADA: $(2, f(2))$. O software tem o poder de armazenamento, logo, ao usar $f(2)$, automaticamente já se utiliza a imagem do 2 pela função (Atentar para o nome da função descrito na Janela de Álgebra). Desta maneira, você, leitor, pode conferir uma função de cada vez e os pontos que foram utilizados no seu quadro, e também conferir a posição no referido gráfico.

Uma forma de deixar seu gráfico mais visível e com mais detalhes é clicar em cima do gráfico e apertar o botão direito do mouse, que irá abrir opções, dentre elas, as Configurações. Ao ativar as configurações, aparecerá uma janela, podendo modificar a cor, a legenda do gráfico, o traço, a espessura da linha, entre outros, conforme pode ser visto na Figura 36.

Figura 36. Janela de Configurações

Fonte: App Suíte GeoGebra[10]

Com isto, o gráfico ficará mais elegante para ser inserido em trabalhos universitários e com o máximo de informações possíveis.

10 Disponível em: https://www.geogebra.org/classic

Limites e Continuidade

Capítulo 02

Neste capítulo, trabalha-se o conceito mais preciso de aproximação. Tratando-se de uma função, tudo o que acontece no domínio da função terá ação direta sobre a sua imagem. Neste caso, estuda-se as aproximações, a fim de obter o entendimento completo do comportamento da função. Além disso, pode-se conseguir o comportamento completo da função, com auxílio dos limites laterais, no infinito e infinitos.

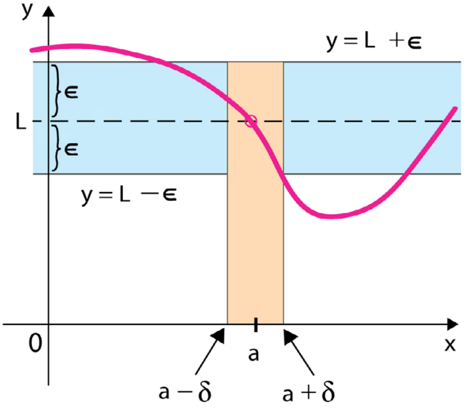
2.1. Limites

Definição: [Limite de uma função] Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é o Limite da função f se:

$$Dado\ \epsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

A definição em termos de ϵ e δ fica bem complicada de entender à primeira vista, mas, desenvolvendo as inequações modulares, fica mais compreensível (Podendo ser visualizada na Figura 37).

Figura 37. Ideia da aproximação e análise do Limite de uma função



Fonte: Stewart, 2013

Destaca-se, inicialmente, a primeira desigualdade modular:

$$|x - a| < \delta \qquad (8)$$

Como todo módulo, o que está dentro do módulo pode ser positivo ou negativo, de forma que seu resultado sempre sairá positivo. Então:

$$x - a < \delta \qquad e \qquad -(x - a) < \delta$$

Donde tem-se:

$$x < a + \delta \qquad e \qquad x > a - \delta$$

Ou seja, juntando as duas informações:

$$a - \delta < x < a + \delta, \text{ i.e, } x \in (a - \delta, a + \delta)$$

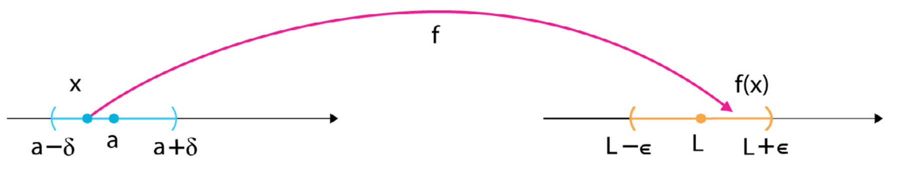
Ainda sobre a mesma desigualdade, temos a condição $|x - a| > 0$, simplesmente, mas não necessariamente, $x = a$. Isso nos dá o leque de que, mesmo sem o ponto estar definido na função, poder ter a aproximação em torno de tal ponto.

Na segunda desigualdade, procedendo de maneira análoga à análise feita para a desigualdade modular, tem-se:

$$f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon)$$

Como já enunciado anteriormente, a análise do limite consiste em uma aproximação intervalar com centro no ponto da análise do limite, e, à medida que há a aproximação, tanto pela direita quanto pela esquerda do ponto, a mesma situação estará acontecendo com as imagens de tais elementos contidos no intervalo (Conforme Figura 37).

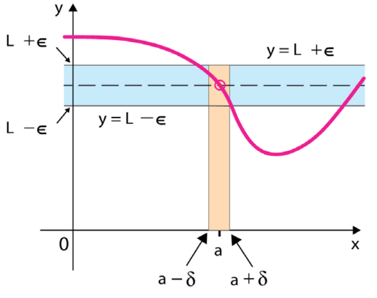
Figura 38. Ideia intervalar do limite de uma função



Fonte: Stewart, 2013

Na Figura 39, pode ser observada a análise do cálculo, que trata-se de uma convergência em relação ao domínio da função (aproximação intervalar convergindo para *a*), mesmo que $a \notin D(f)$, causando uma convergência na imagem da função para um valor real L.

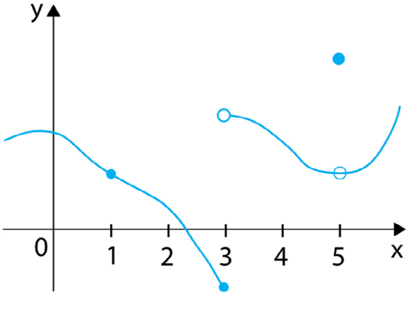
Figura 39. Ideia do limite de uma função, sendo que o ponto *a* não está definido na função



Fonte: Stewart, 2013

Dependendo da função, pode ser que não exista tal L, e neste caso, dizemos que a função não possui limite ou é divergente. Na maioria das vezes, logo se percebe, ao observar uma interrupção abrupta no gráfico, quando uma função não possui limite, ou quando a função apresenta um salto.

Figura 40. Função Descontínua no ponto 3



Fonte: Stewart, 2013

Uma situação bem comum que acontece é a situação reportada na Figura 39, onde mesmo a função não estando definida no ponto x = a, os limites laterais existem! Garantindo, assim, que o limite exista, mas a função não sendo contínua neste ponto.

A partir da própria definição de Limite, nasce a definição de **Limites Laterais**, pois a aproximação acontece à direita do ponto a ser analisado (Conforme Equação (9)) e à esquerda do ponto a ser analisado (Conforme Equação (10)). A notação será dada por:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \qquad (9)$$

E:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \qquad (10)$$

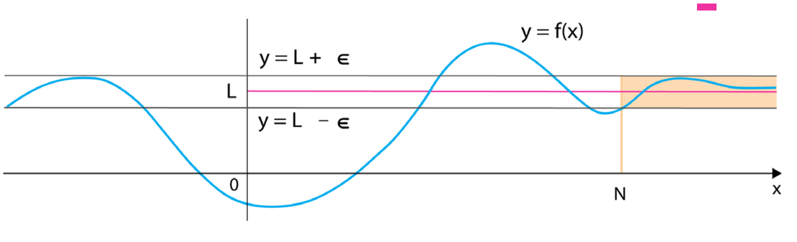
Do mesmo modo para a noção para os Limites no Infinito, os quais já foram mencionados desde o Capítulo 1.

Definição: [Limites no Infinito] Seja *f* uma função real, dizemos que o limite no infinito da função *f*, notado pelas seguintes expressões:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L, i.e, \ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta > a; x > \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

O que significa dizer que: os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande (Como pode ser observado na Figura 41).

Figura 41. Detalhamento do cálculo de limites no infinito. Perceba que a função depois de um certo ***N***, se afunila para bem próximo da reta $y = L$ ( )



Fonte: Stewart, 2013

De forma análoga:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L, i.e, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, -\delta < a; x < -\delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

O que significa dizer que: os valores de $f(x)$ ficam arbitrariamente próximos de L tomando x suficientemente grande, em valor absoluto.

Definição: [Limites Infinitos] Seja *f* uma função real, dizemos que o limite no infinito da função *f*, notado pelas seguintes expressões:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty, i.e, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta > a; x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$$

E:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty, i.e, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \delta > a; x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$$

Outras definições muito importantes se originam a partir dos Limites Laterais e Limites no Infinito:

O limite da função existe se, e somente se, os limites laterais coincidem:

$$\lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

As **Assíntotas Verticais** presentes numa função, as quais são retas verticais, do tipo, $x = a$, no qual faz a função se aproximar, mas não toca, são originadas a partir do cálculo dos limites laterais, da forma a seguir:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

Ou:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

As **Assíntotas Horizontais** presentes numa função, as quais são retas horizontais, do tipo $y = L$, são originadas do cálculo de limites no infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

E/Ou:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Tais cálculos servirão de apoio para plotar o gráfico, atendendo a todas as nuances que o gráfico pode ter de comportamento.

A função a seguir é de extrema importância para o cálculo dos limites laterais e no infinito, pois servirá de base para traçar o gráfico de funções, geralmente escrita da forma de quociente de funções.

Exemplo 9: Analise o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$

Resolução: Primeiro, a função se escreve como um quociente, onde naturalmente o denominador não pode se anular! Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$. Mais à frente, irão seguir o cálculo para a verificação da existência de uma Assíntota Vertical em $x = 0$.

Assim, cria-se um intervalo com raio 0,5 com centro no 0, com espaçamento de 0,1, para tentar visualizar o comportamento do gráfico.

Quadro 16. Pontos sobre o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$

x	***y*** ‘$f(x) = \frac{1}{x}$’	**Ponto (x, y)**
-0,4	$f(-0{,}4) = \frac{1}{-0{,}4} = -2{,}5$	(-0,4; -2,5)
-0,3	$f(-0{,}3) = \frac{1}{-0{,}3} \cong -3{,}3$	(-0,3; -3,3)

-0,2	$f(-0{,}2) = \frac{1}{-0{,}2} = -5$	(-0,2; -5)
-0,1	$f(-0{,}1) = \frac{1}{-0{,}1} = -10$	(-0,1; -10)
0,1	$f(0{,}1) = \frac{1}{0{,}1} = 10$	(0,1; 10)
0,2	$f(0{,}2) = \frac{1}{0{,}2} = 5$	(0,2; 5)
0,3	$f(0{,}3) = \frac{1}{0{,}3} \cong 3{,}3$	(0,3; 3,3)
0,4	$f(0{,}4) = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$	(0,4; 2,5)

Fonte: Da autora

Com os pontos sobre o plano cartesiano, nota-se tratar de uma Hipérbole Equilátera. Ao examinar as Assíntotas presentes no gráfico, temos:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad (11)$$

Pois, no quadro, à medida que nos aproximamos de 0 pela direita, as imagens aumentam cada vez mais.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad (12)$$

Visto que, pelo quadro, à medida que nos aproximamos de 0 pela esquerda, sentido crescente, verifica-se que os valores estão ficando maiores, embora com o sinal negativo.

Destacando-se, assim, a presença da **Assíntota Vertical** em $x = 0$.

Importante notar, que é exatamente sobre o ponto da restrição da função que será verificada a existência de assíntotas verticais.

Agora, analisando os limites infinitos:

Perceba que, à medida que os valores de *x* aumentam, como por exemplo, podemos pensar nos valores 10; 100; 1000, as imagens desses valores pela função *f* se tornam 0,1; 0,01; 0,001, respectivamente, isto é, cada vez mais se aproximam de 0. Analogamente para valores negativos, à medida que $x \to -\infty$, as imagens por *f*, $f(x) \to 0$. Assim:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad (13)$$

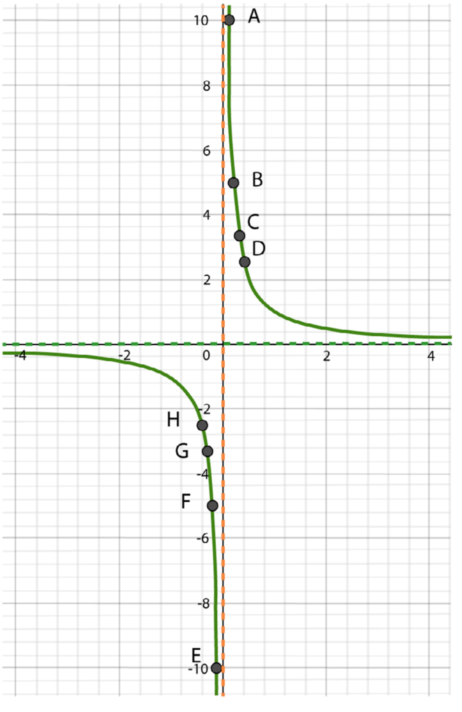
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad (14)$$

As duas afirmações acima garantem que $y = 0$ é uma **Assíntota Horizontal**.

Assim, as Assíntotas Horizontais são sempre identificadas a partir dos limites no infinito da função, ou seja, uma determinada função pode não possuir assíntotas, possuir uma assíntota (como visto neste exemplo) ou duas assíntotas, somente essas possibilidades.

Na Figura 42, pode-se perceber o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$ e os pontos que estão no Quadro 16 dispostos sobre o mesmo.

Figura 42. Gráfico da função



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ serve de apoio para calcular os limites laterais, juntamente com as propriedades de Limites.

Definição: [Propriedades de Limites] Sejam f e g funções reais tais que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = M$$

E:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Então, são válidas:

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L + M$$

$$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

$$\lim_{x \to a} (f . g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x) = L . M$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{M}; M \neq 0$$

$$\lim_{x \to a} (kf)(x) = k \lim_{x \to a} f(x) = kL$$

$$\lim_{x \to a} f(x)^p = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^p = L^p$$

$$\lim_{x \to a} k = k; k \text{ é } uma\ constante$$

Tais propriedades são verdadeiras para o cálculo de limites infinitos. E vale:

$$k.(+\infty) = \begin{cases} +\infty, se\ k > 0 \\ -\infty, se\ k < 0 \end{cases} \qquad (15)$$

Além de indeterminações como: $(+\infty).(+\infty) = +\infty$ ou $(-\infty).(+\infty) = -\infty$ ou $(-\infty);(-\infty) = +\infty$.

Exemplo 10: Verifique se existe o limite da função $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ no ponto $x = 1$. Caso exista, calcule o seu valor.

Resolução:

Maneira 1: Primeiro, verifica-se que o Domínio da função f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x - 1 \neq 0\}$, por se tratar de uma função definida como um quociente, deve-se restringir o denominador. No ponto cuja função não está definida, pede-se para analisar a existência do Limite, não havendo nenhum impedimento para isso.

Para tal investigação, toma-se um intervalo com o centro $x = 1$ e o raio 0,5 (Tal raio pode ser definido suficientemente pequeno, de forma que possa haver a análise das imagens). Observe o quadro:

Quadro 17. Análise da Imagem pela função

x	$\frac{2x-3}{x-1}$
0.6	4.5
0.7	5.33
0.8	7
0.9	12
1	
1.1	-8
1.2	-3
1.3	-1.33
1.4	-0.5

Fonte: App Suíte GeoGebra – Planilha

Assim, no intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, a função é decrescente, mas as imagens aumentam sem um padrão de crescimento definido. Da mesma forma, no intervalo $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, a função é decrescente, mas as imagens diminuem sem um parâmetro de decrescimento claro.

Logo, não existe limite da função *f* no ponto $x = 1$.

Maneira 2: Ao perceber que a função não está definida em $x = 1$, deve-se verificar se neste ponto existe uma Assíntota. Então, para isso, examinam-se os limites laterais à direita e à esquerda de $x = 1$ - Assíntotas Verticais e os Limites Infinitos, para examinar a existência de Assíntotas Horizontais, ou comportamento no infinito.

Usando as propriedades de Limite item *iv*, *i* e *ii*, na Equação (15), além da notação:

$$0^+ = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad e \quad 0^- = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$$

Obtém-se:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x-3}{x-1} = \frac{\lim_{x \to 1^+} 2x-3}{\lim_{x \to 1^+} x-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x-3}{x-1} = \frac{\lim_{x \to 1^-} 2x-3}{\lim_{x \to 1^-} x-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

O que nos diz que a reta $x = 1$ é uma Assíntota Vertical.

Realizando os cálculos de Limites no Infinito, sempre use como base a função $f(x) = \frac{1}{x}$ e o seu respectivo comportamento. O procedimento consiste dessa forma de colocar em evidência a variável com maior expoente, tanto no numerador quanto no denominador, a fim de encontrar os quocientes de *x*, fazendo *x* tender para o infinito e convergir para 0.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-3}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1} = 2$$

Neste caso, o procedimento é o mesmo para $-\infty$:

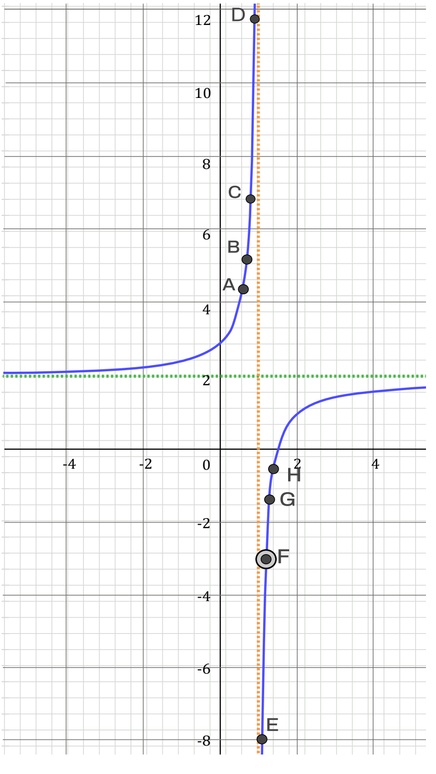
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-3}{x-1} = 2$$

Os cálculos dos limites infinitos indicam que $y = 2$ é uma assíntota horizontal.

Dessa forma, fica mais fácil plotar o gráfico. Adicione as retas (assíntotas) no plano, colocando poucos pontos para o entendimento do seu comportamento.

Observando o gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ na Figura 40, pode-se visualizar amplamente que não existe o limite da função.

Figura 43. Gráfico da função $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$ com a presença da reta (Assíntota Vertical) e (Assíntota Horizontal)



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

2.1.1. Exercícios de Fixação

Agora ficou bem mais simples plotar o gráfico de uma função. Atente-se para o cálculo das assíntotas, zeros da função e ponto que ‘corta’ o eixo das ordenadas. Daí, se ainda tiver dúvidas sobre o comportamento da função, tome alguns valores para *x* e faça o cálculo de sua respectiva imagem.

Vamos colocar em prática tudo aquilo que você já aprendeu até aqui. Ao final, pode-se plotar o gráfico no software GeoGebra para a devida verificação.

1. Plote o gráfico das seguintes funções, destacando suas assíntotas (caso exista) e pontos ideais.

a) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{2\mathrm{x}^2 - 8}{\mathrm{x} - 3}$

b) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x}^2 - 1}{2\mathrm{x}}$

c) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{2\mathrm{x} + 4}{\mathrm{x}^2 - 1}$

d) $f(\mathrm{x}) = \dfrac{\mathrm{x} - 3}{\mathrm{x}^2 - 5\mathrm{x} + 4}$

e) $f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^3 - 1$

2.2. Cálculo de Limites

O cálculo do Limite de uma função pode ser feito de maneira construtiva, como foi realizado no Exemplo 8, quer seja simulando a aproximação intervalar, quer seja construindo o gráfico, observando se existe alguma descontinuidade no ponto em questão.

Mas nesta sessão se mostrará algumas técnicas para o cálculo do limite.

Quadro 18. Situações para o Cálculo do Limite

Situação	**Cálculo**	**Termos matemáticos**
Caso o ponto em análise pertença ao Domínio da função	Substitui-se o valor na função e o limite coincidirá com a imagem do ponto pela função	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
Caso o ponto em análise não esteja definido no Domínio da função. Em geral, a função se apresenta como uma fração	Usa-se produtos notáveis para a simplificação do polinômio e verifica-se ainda, assim pode ser substituído o valor de *x*	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{p(x)}{q(x)} = r(a)$
Caso a função esteja na forma de fração, sendo o denominador apresentando um termo com raiz	Utiliza-se o mecanismo de racionalização (‘desracionalização’)	$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}} = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{p(x)}{\sqrt{q(x)}} . \frac{\sqrt{q(x)}}{\sqrt{q(x)}} = \frac{p(a).\sqrt{q(a)}}{q(a)}$

Fonte: Da autora

Em situações mais adversas que não se encontram no Quadro 18, a análise deverá ser realizada por meio da aproximação intervalar com convergência para o ponto da análise e suas respectivas imagens ou através do traço do gráfico da função.

A seguir, apresentam-se os principais Produtos Notáveis:

Definição: Sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$, são válidas:

Diferença entre Quadrados: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Quadrado da Soma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Quadrado da Diferença: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Diferença entre Cubos: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Cubo da Soma: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Cubo da Diferença: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Decomposição de Girard: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x^{'}\right)(x - x'')$, onde x' e x" são as raízes do polinômio do 2º grau.

Exemplo 11: Calcule o limite da função, caso exista, dada por $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2 - 9}$ no ponto de abscissa.

Resolução: Primeiro, observamos que a função não está definida em x = -3 , pois o denominador se anula nesse ponto, o que gera uma indeterminação. Portanto, o cálculo se compreende no 2º quesito do Quadro 15, em que temos que usar produtos notáveis para simplificar o quociente.

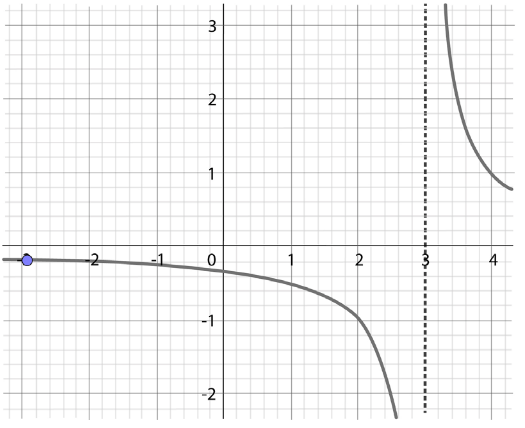
Segundo, usando diferença entre quadrados, i.e, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, pode-se substituir o polinômio $q(x) = x^2 - 9$ pela sua devida fatoração.

Terceiro, seguindo o cálculo:

$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2 - 9} = \lim_{x \to -3} \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \to -3} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-6}$$

Para ficar mais claro ainda, na Figura 44, observa-se a existência do limite.

Figura 44. Gráfico da Função $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-9}$



Fonte: App Suíte Geogebra – Gráfica

Observação 8: No exemplo 9, caso a análise fosse em torno do ponto de abscissa $x = 3$, o limite não existiria. O motivo seria a existência de uma Assíntota Vertical em $x = 3$, onde os limites à esquerda e à direita divergem.

2.3. Continuidade de Funções

Definição: Uma função é dita contínua em um ponto caso aconteça as seguintes condições:

i) Existir o limite da função no ponto;

ii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Caso aconteça i) e ii), para todo ponto do domínio da função *f*, a função é dita contínua.

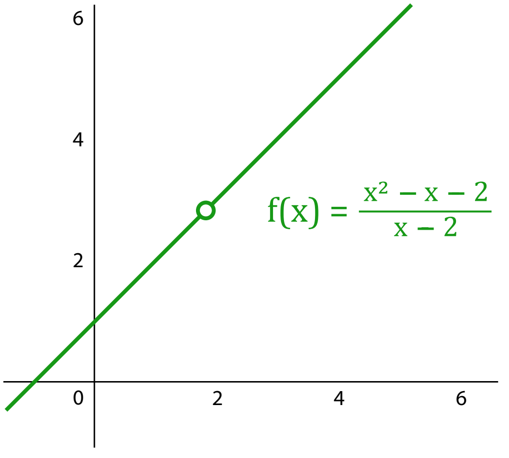
O conjunto das funções contínuas constituem o espaço das funções de classe C^0.

Observação 9: Em alguns casos, há uma imposição de que a função seja contínua, daí usa-se a forma particionada de escrever uma função.

Podemos citar a função $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$, onde claramente a função não está definida para $x = 2$. Mesmo assim, pode-se calcular, caso exista, o limite de tal função, como segue:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x + 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x\to 2} x + 1 = 3$$

Figura 45. Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$



Fonte: App Suíte Geogebra – Gráfica

O que se pode perceber no gráfico da função f é que, neste caso, trata-se de uma reta com um "buraco", por assim dizer, no ponto (2,3), o que a tornaria descontínua em $x = 2$. No entanto, a função f pode ser definida da seguinte maneira:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, se\ x \neq 2 \\ 3, se\ x = 2 \end{cases}$$

Dessa forma, a função f seria contínua.

2.4. Gráfico de Funções com o uso das Assíntotas

Um resumo do que foi apresentado neste capítulo é que o conceito de limite pode ampliar a construção de gráficos de funções, principalmente quando a função não é definida em uma linha, sendo estas funções do tipo quociente, que geram várias assíntotas dentro do gráfico.

Esquema geral para construção do gráfico via Limites:

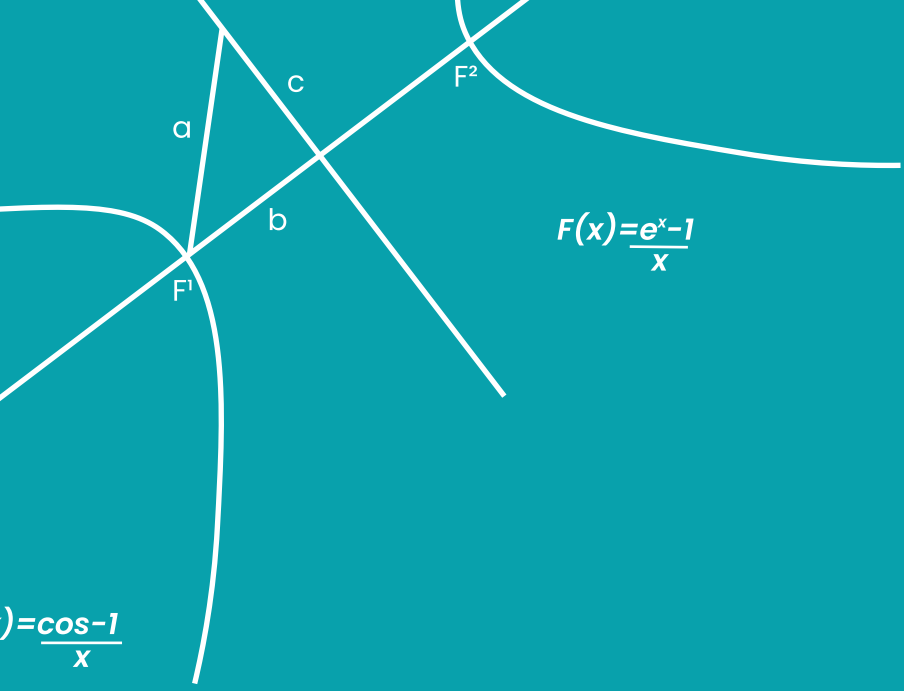
1) Verificar o domínio da função: Caso a função apresente restrições, deve-se investigar a existência de Assíntotas Verticais nos pontos de restrição, realizando o cálculo dos Limites Laterais desses pontos.

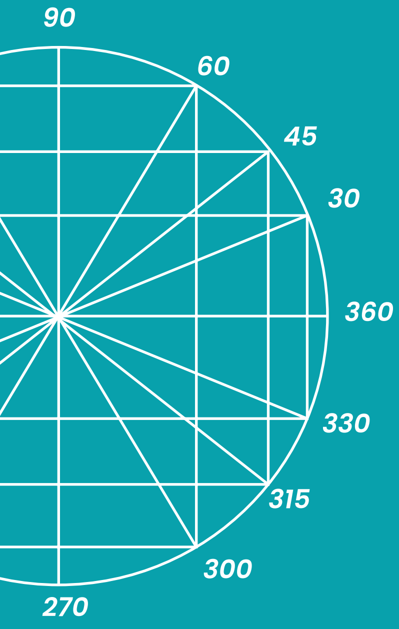
2) Analisar o comportamento da função no infinito: Ou seja, calcula-se os Limites no Infinito, possibilitando a existência de Assíntotas Horizontais.

3) Determinar os zeros da função: Lembre-se de que, se a função for do tipo quociente, é necessário identificar apenas os zeros do numerador.

4) Determinar o ponto de interseção com o eixo das ordenadas: Isso é feito fazendo $x = 0$.

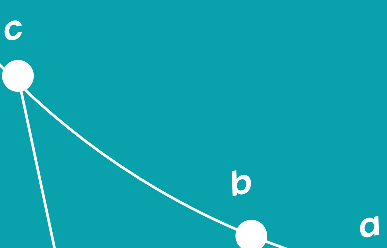
A partir da determinação de cada item listado acima, o gráfico pode ser construído.





Diferenciabilidade de Funções

Capítulo 03



As funções diferenciáveis são muito importantes, pois além de poderem 'prever' o comportamento da função com mais exatidão, possibilitam uma infinidade de aplicações envolvendo a derivada da função, como por exemplo, a taxa de variação, que as Ciências Exatas, principalmente a Física, utilizam e destacam um dos seus principais conceitos: Velocidade e Aceleração, em muitos problemas dentro das Engenharias, os quais podem ser modelados matematicamente e solucionados a partir de métodos diferenciáveis.

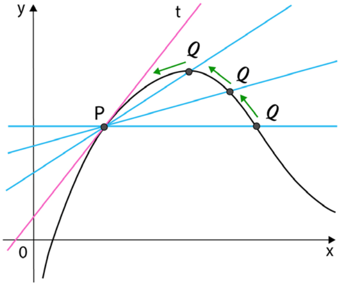
3.1. Derivada de uma Função

3.1.1. Noção da Derivada de uma função num ponto

Definição: [Derivada Pontual] A derivada de uma função num determinado ponto $(a, f, (a))$, onde f é uma função contínua, é definida como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função.

A demonstração deste fato consiste em considerar retas secantes sobre o gráfico até o momento em que, com a aproximação para o ponto requerido, se terá a reta tangente ao gráfico da função f, conforme mostra a Figura 46:

Figura 46. Situação das retas secantes convergindo para uma reta tangente

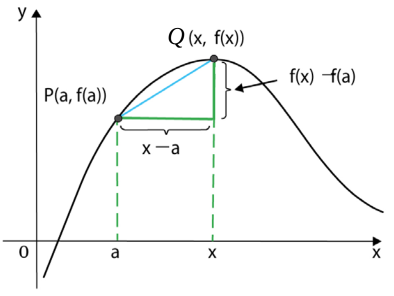


Fonte: Stewart, 2013

Assim, calculando o ângulo a partir de um triângulo formado com dois pontos vindos da interseção das secantes sobre o gráfico, tem-se o quociente de Newton.

$$tan\theta = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Figura 47. Determinação do cálculo do ângulo a partir do triângulo retângulo



Fonte: Stewart, 2013

Como se quer uma reta tangente, faz-se o limite quando *x* se aproxima de *a*. Desse modo, tem-se:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (16)$$

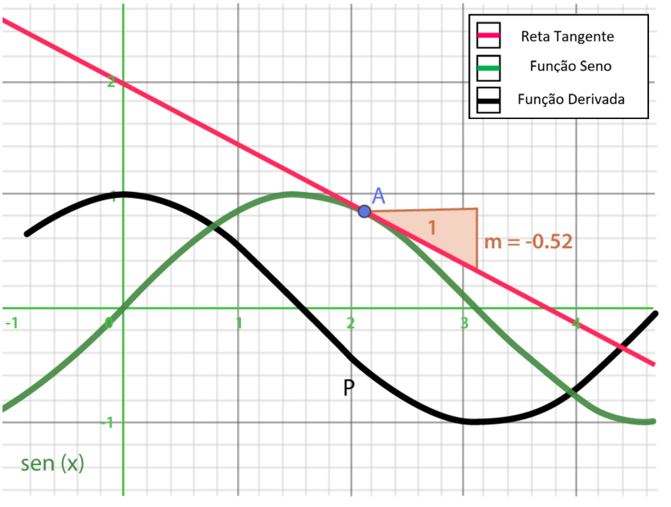
De maneira análoga, tem-se a definição da Derivada Total da função *f*, a partir dos pontos $(x, f(x))$ e um afastamento $(x + h, f(x+h))$, com $h > 0$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \qquad (17)$$

Naturalmente, se quiser calcular a derivada de uma função, num determinado ponto, pode-se obter a derivada da função e, após isso, aplicar o ponto desejado.

Uma observação importante é que se constrói com o conceito pontual a função derivada. Quando essa função que é obtida é contínua, diz-se que a função é diferenciável, ou ainda, de classe C^1.

Figura 48. Construção da Função Derivada cujos pontos são $P = (x\,(A), m)$, onde m é a inclinação da Reta Tangente



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

O conjunto das funções diferenciáveis constitui o conjunto das funções de Classe C^1.

3.2. Regra de Derivação por Definição

Neste tópico, será feito o desenvolvimento de algumas regras de derivação para funções bem conhecidas. Mas o leitor pode se deleitar e aproveitar para fazer demonstrações de todas as funções vistas no Capítulo 1. Claramente alguns desenvolvimentos precisam dos chamados "Limites Fundamentais", o qual será enunciado e poderá ser examinado em Guidorizzi (2008).

Exemplo 12: Calculando a derivada da função do 1º grau, $f(x) = x$.

Resolução: Conforme a equação 17, temos que calcular $f(x + h) = x + h$, substituindo:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x} + h - \cancel{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

Exemplo 13: Calculando a derivada da função do 2º grau, $f(x) = x^2$.

Resolução: Temos que $f(x + h) = (x + h)^2$. Assim:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Exemplo 14: Calculando a derivada da função exponencial, $f(x) = e^x$.

Resolução: Temos que $f(x + h) = e^{x+h} = e^x e^h$. Logo:

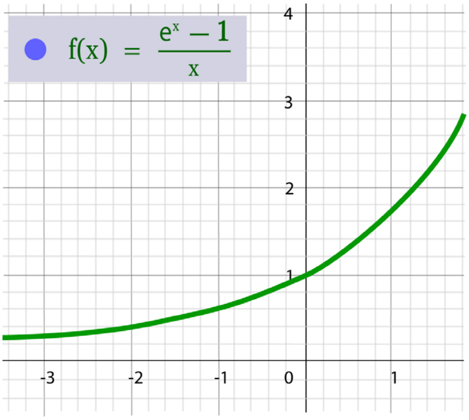
$$\lim_{h \to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h}$$

Vendo que a função e^x não depende de h, ela pode ser retirada do limite. A seguir, será utilizado o limite fundamental:

$$e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

Observação 9: Ao analisar o gráfico da função $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, conforme a Figura 48, percebe-se claramente que, quando x se aproxima de zero, tanto pela esquerda quanto pela direita, o limite é igual a 1.

Figura 49. Gráfico da função $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Porém, pode-se provar que $\lim_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$ é igual a 1. Neste caso, deve-se realizar uma substituição dentro do limite. Vale ressaltar que, após a substituição, tudo ficará em função da nova variável.

Assim, temos que $f'(x) = e^x . 1 = e^x$.

Outra maneira de constatar que o limite envolvendo a função exponencial é verdadeiro é utilizando uma substituição no limite, onde todas as variáveis *x* devem ser substituídas pela nova variável.

Fazendo:

$$u = e^h - 1 \qquad (18)$$

Naturalmente, percebe-se que, quando o $h \to 0$ em (18), a variável $u \to 0$. E isolando o h na equação (18), temos:

$$e^h = u + 1 \Rightarrow h = ln(u + 1)$$

Utilizando a propriedade de Limite e do Logaritmo, obtém-se:

$$lim\frac{u}{ln(u+1)} = \left[\lim_{n\to\infty}\frac{ln(u+1)}{u}\right]^{-1} = \left[ln \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-1} = [lne]^{-1} = 1^{-1} = 1$$

A segunda igualdade se deve ao fato da função logarítmica *In* ser contínua e a sequência ser convergente, o que permite a troca de limites.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Exemplo 15: Calculando a derivada da função logarítmica $f(x) = lnx$.

Resolução: Para a resolução completa, utilizaremos as propriedades do Logaritmo e também um resultado sobre funções contínuas aplicadas a sequências.

Calculando $f(x+h) = ln(x+h)$, substituímos em (17):

$$\lim_{h\to 0}\frac{ln(x+h)-lnx}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} ln\left(\frac{x\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}$$

Agora, fazemos a substituição $u = \frac{h}{x}$, o que nos dá:

$$\lim_{u\to 0} ln(1+u)^{\frac{1}{ux}} = \lim_{u\to 0} ln(1+u)^{\frac{1}{x}\frac{1}{u}} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{x}ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{x}ln\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} =$$

$$\frac{1}{x}lne = \frac{1}{x}$$

Observação 10: O limite da sequência $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ é convergente e converge para o número e quando $n\to\infty$. Isso pode ser demonstrado fazendo a substituição $u = \frac{1}{n}$, o que implica que, quando $n\to\infty$, temos $u\to 0$. Resultando-se assim:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Exemplo 16: Calculando a derivada da função trigonométrica $f(x) = senx$.

Resolução: Tendo que $f(x+h) = sen(x+h)$, no qual pelo seno da soma tem-se:

$$sen(x+h) = senx\ cosh + senh\ cosx$$

Substituindo na Equação (17):

$$\lim_{h\to 0} \frac{sen\ x\ cos\ h + sen\ h\ cosx - sen\ x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sen\ x(cos\ h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{sen\ h\ cos\ x}{h} = senx \lim_{h\to 0} \frac{cos\ h - 1}{h} + cosx \lim_{h\to 0} \frac{sen\ h}{h}$$

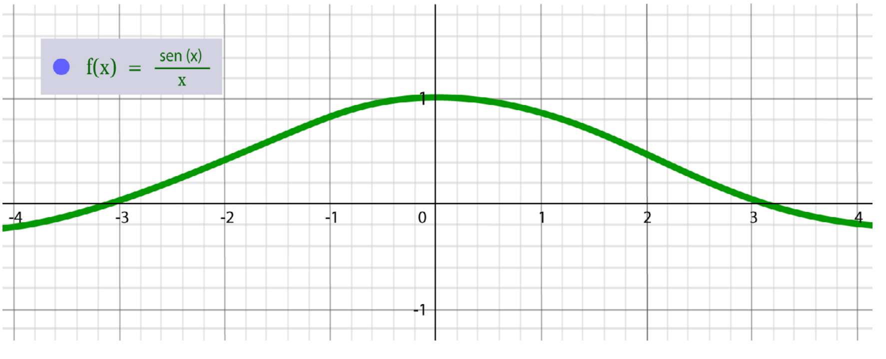
Nesta última igualdade, perceba que as funções *sen x* e *cos x* não dependem da variável h, por isso, saem do limite.

Para o desdobramento do cálculo, recairá nos chamados Limites Fundamentais do Seno, dado por:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$$

Devido ao seu gráfico exposto na Figura 50, no qual o ponto (0,1) não está definido, pois $0 \notin D(f)$, neste caso:

Figura 50. Função que determina o Limite Fundamental da Função Seno



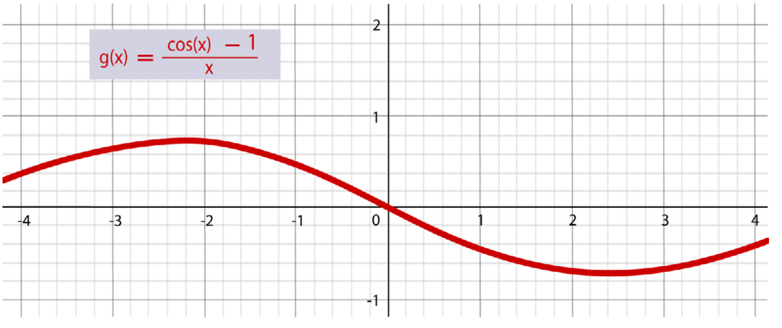
Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

E o limite fundamental do Cosseno:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Devido ao seu gráfico exposto na Figura 51, o ponto (0,0) não está definido na função:

Figura 51. Gráfico da função responsável pelo Limite Fundamental do Cosseno



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Dessa maneira, a derivada da função $f(x) = sen\ x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{sen(x+h) - senx}{h} = sen\ x\ .0 + cos\ x\ .1 = cos\ x$$

3.3. Regras de Derivação

A partir dos cálculos realizados na seção 3.2, pode-se verificar a Tabela contendo as Regras de Derivação para as principais funções vistas no Capítulo 1.

Quadro 19. Regras de Derivação

Função	Lei	Derivada
Algébrica	$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
Trigonométrica	$f(x) = senx$	$f'(x) = cosx$
	$f(x) = cosx$	$f'(x) = -\ senx$

Exponencial	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
Logarítmica	$f(x) = Inx$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

Fonte: Da autora

Com estas derivadas, pode-se obter várias outras, a partir das propriedades e de outros Teoremas importantes, como o da Regra da Cadeia.

3.4. Propriedades de Derivação

As propriedades de derivação decorrem da definição de derivada através do limite, levando em consideração as propriedades de funções.

Sejam f, g funções deriváveis e contínuas, $k \in \mathbb{R}$, então valem as seguintes propriedades:

i) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

ii) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

iii) $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

iv) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, com $g(x) \neq 0$

v) $(kf)'(x) = kf'(x)$

vi) $(k)' = 0$ "Derivada de função constante é zero!"

Tais propriedades são demonstráveis, utilize a equação (17) para a realização dos devidos cálculos. Também é possível ver a demonstração em Stewart (2013).

Exemplo 17: Calcule a derivada da função $f(x) = tan(x)$, cujo gráfico é conhecido por tangenóide.

Resolução: Lembre-se que a função tangente é um quociente, $tan(x) = \frac{senx}{cosx}$. Sendo assim, deve-se usar a Propriedade de Derivação iv) e as derivadas construídas na seção 3.3.

$$tan(x)' = \left(\frac{senx}{cosx}\right)' = \frac{sen(x)'.cosx - senx.(cosx)'}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sen^2 x}{cos^2 x} = \left(\frac{1}{cosx}\right)^2 = sec^2 x.$$

3.5. Reta Tangente

A reta tangente fica bem fácil de determinar, uma vez que já temos o coeficiente angular.

Como já visto no curso de geometria analítica, podemos determinar a equação de uma reta a partir do seu coeficiente angular, através da equação a seguir:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Onde Δx é a variação em relação ao eixo das abscissas e Δy é a variação em relação ao eixo das ordenadas. Porém, já foi visto na seção 3.1, que o coeficiente angular da reta tangente é dado pela derivada da função no ponto dado.

Assim, a reta tangente ao gráfico da função f no ponto (x_0, y_0) pode ser obtido por:

$$f'(x_0) = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Ou, ainda:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \qquad (19)$$

Onde $y_0 = f(x_0)$.

Exemplo 18: Construa a reta tangente à função $f(x) = x^2$ nos pontos de abscissa 1, -1 e 0.

Resolução: De posse das regras de derivação vistas na seção 3.2, tem-se que a derivada de f é $f'(x) = 2x$.

Assim, a reta tangente no ponto $(1, f(1))$, uma vez que $f(1) = 1^2 = 1$, cuja derivada em $x = 1$ é $f'(1) = 2 * 1 = 2$, tem-se a reta crescente:

$$y = 2x - 1$$

Já a reta tangente no ponto $(-1, f(-1))$, onde $f(-1) = (-1)^2 = 1$ e $f'(-1) = 2 * (-1) = -2$, resultando na reta decrescente:

$$y = -2x - 1$$

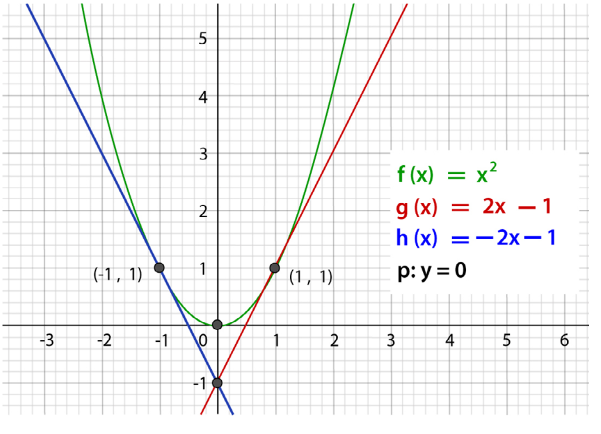
Analogamente à reta tangente no ponto $(0, f(0))$, com $f(0) = 0^2 = 0$ e $f'(0) = 2 * 0 = 0$, resultando na reta:

$$y = 0$$

Analisando o gráfico da função e as respectivas retas tangentes nos pontos (1,1), (-1,1) e (0,0), conforme a Figura 51, nota-se que:

- quando a reta tangente é crescente (ou seja, o coeficiente angular é positivo), a função está crescendo.
- quando a reta tangente é decrescente (ou seja, o coeficiente angular é negativo), a função está decrescendo.
- quando a reta tangente é nula (ou seja, o coeficiente angular é nulo), a função apresenta um **ponto crítico**, que pode ser classificado localmente em: ponto de mínimo (no caso deste exemplo), ponto de máximo ou ponto de sela.

Figura 52. Esquema gráfico da função e retas tangentes em pontos simétricos e na origem



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Desta maneira, pode-se inferir a partir do estudo do sinal da função derivada, o comportamento da função, identificando os pontos de mínimo, de máximo ou de sela, presentes na função, onde será mais detalhado na seção 4.2.

3.6. Regra da Cadeia

A Regra da Cadeia serve para derivar funções compostas e é amplamente aplicada em Taxas de Variação, uma vez que, em problemas na Engenharia e na Física, as variáveis dependem, por exemplo, do tempo, constituindo uma função dependente ou composta. Foi descoberta e demonstrada pelo Matemático Alemão Gottifried Leibniz (1646 - 1716).

Teorema: [Regra da Cadeia] Sejam f e g funções deriváveis, tais que $Im(f) = D(g)$, a derivada da função composta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ é dada por:

$$g\big(f(x)\big)' = g'\big(f(x)\big).f'(x)$$

A demonstração deste Teorema se encontra no Livro [3].

Em termos da notação de Leibniz, a Regra da Cadeia se formula por:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{df}.\frac{df}{dx}$$

Ou, mais precisamente:

$$\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x} = \left.\frac{dg}{df}\right|_{f(x)}.\left.\frac{df}{dx}\right|_{x}$$

Exemplo 18: Sendo admitido que as funções f e g são diferenciáveis e que vale a tabela:

Quadro 20. Imagens das funções f, g, f' e g'

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

Fonte: Da autora

Nessas condições, calcule $(f \circ g)'(1)$ e $(g \circ f)'(1)$.

Resolução: Usando a Regra da Cadeia para calcular a derivada da função composta $(f \circ g)(x)$, tem-se:

$$(f \circ g)'(1) = f'\big(g(1)\big).\, g'(1)$$

Onde, identificando conforme a tabela exposta no problema, obtém-se, ordenadamente:

$$f'(2).\,6 = 5.6 = 30$$

De maneira análoga, descreve-se a aplicação da fórmula, após, substitui-se os valores da imagem, com menção à função interna, e ordenadamente os cálculos seguem:

$$(g \circ f)'(1) = g'\big(f(1)\big).\, f'(1) = g'(3).\,4 = 9.4 = 36.$$

Esse exemplo é bem ilustrativo e demonstra a importância de calcular sequencialmente os valores e no final se obter o número, que representa a derivada da função em um ponto.

3.7. Derivada Implícita

Definição: [Função Implícita] Uma função é dada implicitamente quando não se consegue exibir a função por completo. Em geral, a função implícita é dada em termos de uma equação que envolve tanto a própria função quanto a sua variável.

Utilizando o mecanismo de evidenciar a função interna para a realização da derivação por meio da regra da cadeia, fica bem mais simplificado. Já o outro método consiste em transformar a equação numa função que depende de duas variáveis e realizar as derivadas, como por exemplo $F(x, y)$. Fazendo uma árvore para identificar graficamente, temos:

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ / & & \backslash \\ x & & y \\ | & & | \\ x & & x \end{array}$$

Onde cada traço simboliza uma derivada. No caso das duas primeiras, fazem menção às derivadas parciais de F em relação às variáveis x e y, ou seja, aplica-se a regra de derivação para cada uma das variáveis, fazendo a outra variável igual a uma constante. Já nos segundos traços, simboliza a derivada de x em relação à x, que é igual a 1, e o outro, a derivada ordinária $\frac{dy}{dx}$.

Note-se que $F(x, y) = 0$, pois todos os termos da equação foram para o 1º membro, e no segundo ficou o 0.

$$\cancelto{0}{\frac{d\,F}{dx}} = F_x\,.1 + F_y\,.\frac{dy}{dx}$$

Isolando a derivada que se almeja, tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (20)$$

Exemplo 18: Seja $y = f(x)$ uma função diferenciável e dada implicitamente por:

$$xe^y = x - y$$

Nestes termos, calcule $\frac{dy}{dx}$.

Resolução: Primeiramente, perceba que não é possível isolar o y, a fim de obter f explicitamente.

Assim, para calcular a derivada da função, define-se a função $F(x, y) = xe^y - x + y$. Utilizando-se a equação (20), as derivadas F_x e F_y serão calculadas utilizando a regra de derivação para cada uma das variáveis. Assim,

$F_x = e^y - 1$ e $F_y = xe^y + 1$. O que resulta em:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y - 1}{xe^y + 1}$$

Perceba que a derivada acima depende tanto da variável x como da sua imagem y.

Um outro exemplo de função implícita que pode ser exemplificado é para as curvas no plano, denominadas como cônicas. As cônicas precisam ser "cobertas" por duas ou mais funções, pelo simples fato de, em alguns casos, não serem definidas como função.

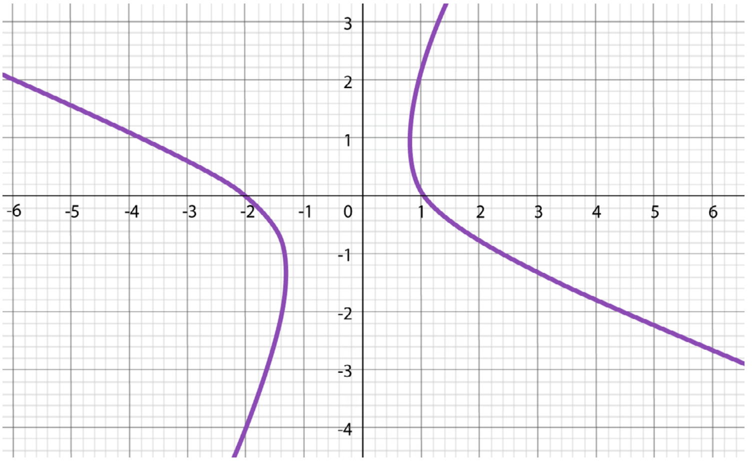
É o caso da Elipse, Circunferência e Parábola com concavidades para a esquerda ou direita e a Hipérbole.

No exemplo a seguir, será examinado um desses casos e aplicados à determinação da reta tangente.

Exemplo 19: Determine a reta tangente à Hipérbole $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$ no ponto (1,2).

Resolução: Plotando a Hipérbole (Ver [3]), conforme a Figura 53:

Figura 53. Traço da Curva Hipérbole $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Neste caso, precisa-se do coeficiente angular da reta tangente que, como visto anteriormente, é dado pela derivada.

Usando a equação (20) para calcular a derivada implícita de *y*, tem-se:

$$F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 + x - 2$$

Donde se calcula as derivadas parciais:

$$F_x = 2x + 2y + 1 \text{ e } F_y = 2x - 2y$$

Dessa forma:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + 2y + 1}{2x - 2y}$$

Aplicando a derivada no ponto (1,2):

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = -\frac{7}{-2} = \frac{7}{2}$$

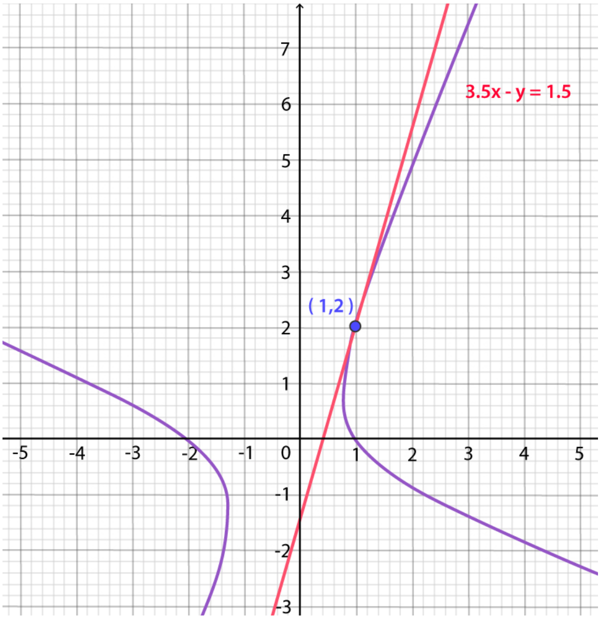
Logo, a equação da reta tangente será:

$$y = \frac{7}{2}(x-1) + 2$$

Ou ainda:

$$y = \frac{7}{2}x - \frac{7}{2} + 2 = \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}.$$

Figura 54. Traço da Curva juntamente com a Reta Tangente no ponto especificado



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Outra contribuição da derivada implícita é a derivada de funções trigonométricas inversas, o que será visto no exemplo a seguir:

Exemplo 20: A derivada da função "Arcoseno", *asen*(x), ou a função inversa da função *sen*(x).

Resolução: Lembre-se que a composição $sen\, x \,.\, asen\, x = x$ (a função composta com sua inversa resulta na função identidade).

Seja $y = asen\ x$, então, isso significa que ao aplicar a função seno em ambos os membros, terá:

$$sen\ y = x \qquad (21)$$

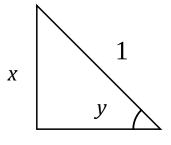
Lembre-se de que $y = y(x)$, então, ao se derivar toda a equação (21) em relação à variável x, obtém-se:

$$cosy.\frac{dy}{dx} = 1$$

Logo, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosy}$.

Note que, mesmo que a equação acima já seja resumida, ela também foi dada implicitamente. Então, deve-se retornar à variável.

A equação (21), vista de forma geométrica, por meio de um triângulo retângulo, diz que:



Logo, o outro cateto é dado por meio do *cosy* que, utilizando o Teorema de Pitágoras, obtém-se:

$$cosy = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{1}$$

Assim, a derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3.7. Taxas de Variação e Taxas Relacionadas

Nesta seção, estudaremos uma das aplicações mais importantes de derivadas aplicadas à Física e à Engenharia.

Definição: [Taxa de Variação] A taxa de variação é o cálculo de variação de uma função, no qual sua variável está se movendo e é calculada como um quociente entre as variações envolvidas.

No caso da Física, pode-se entender a Velocidade como uma taxa de variação, comumente calculada por:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Onde $x = x(t)$ é a função posição, a qual determina a posição de um objeto/partícula num determinado instante *t*. A velocidade instantânea é identificada com a derivada da função posição *x* em relação ao tempo *t*. Dependendo de cada problema, a taxa será modelada para, assim, solucionar o problema.

Definição: [Taxa Relacionada] A taxa relacionada é uma taxa de variação, na qual a função é uma função composta.

Assim, para solucionar o problema, deverá ser utilizada a Regra da Cadeia, ou mesmo a ideia da derivada implícita.

O exemplo a seguir envolverá o cálculo de áreas e o leitor deverá ter familiaridade com as fórmulas de cálculo de áreas.

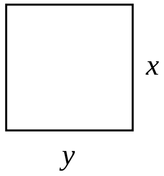
Exemplo 21: O comprimento de um retângulo está aumentando a uma taxa de 8*cm*/*s* e sua largura está aumentando a uma taxa de 3*cm/s*. Quando o comprimento for de 20*cm* e a sua largura for de 10*cm*, quão rápido a área do retângulo está aumentando?

Resolução: O leitor deve usar a sua imaginação e pensar que existe um retângulo, no qual suas arestas estão crescendo em função do tempo e que, consequentemente, sua área irá aumentar conformemente.

As medidas das taxas de variação devem ser levadas em consideração, por exemplo, no enunciado do problema se diz que o comprimento está aumentando a 8*cm* cada segundo e a largura 3*cm* a cada segundo.

Outra coisa muito importante é destacar as medidas que estão sendo trabalhadas no problema, no caso, um retângulo que tem suas dimensões dadas através do seu comprimento e de sua largura, pois trata-se de uma figura bidimensional.

O ideal é também esboçar um desenho que represente o problema, como a seguir:



Já identificadas as medidas, agora pode-se traduzir para a linguagem matemática as taxas envolvidas.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8 \\ \dfrac{dy}{dt} = 3 \end{cases}$$

Observe que tais taxas são constantes.

Assim, levando-se em consideração que a área do retângulo é o produto do comprimento pela largura, temos a função área dada por:

$$A(x, y) = x.y \qquad (22)$$

Onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$.

Para calcular a derivada da função área em função do tempo, deriva-se (22) em função do tempo, não esquecendo de usar a regra do produto do lado direito:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dx}{dt}.y(t) + x(t).\frac{dy}{dt}$$

Assim, como é solicitado essa taxa quando $x = 20$ e $y = 10$, tem-se:

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{x=20 \\ y=10}} = 8.10 + 20.3 = 140cm^2/s$$

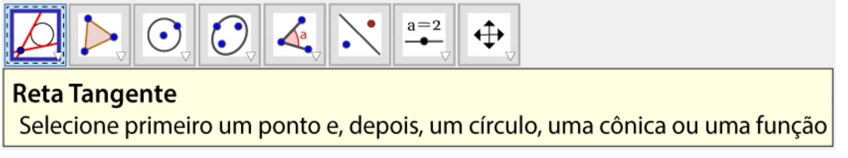
Pode-se obter que a área, nessas circunstâncias, está aumentando a cada segundo $140cm^2$.

Muitos outros problemas envolvendo áreas, volumes e problemas de Engenharia são solucionados com esse método.

3.8. Derivadas usando o GeoGebra

Até aqui, você leitor já sabe plotar um gráfico no GeoGebra, agora para melhorar sua percepção sobre Derivadas, pode-se criar um ponto sobre o gráfico da função com a ferramenta Ponto, clicar sobre o gráfico, e depois, com o botão Mover, arrastar o ponto sobre o gráfico. Isto já se torna bem interessante, pois você passeia sobre o gráfico da função. Agora com a ferramenta Reta Tangente, conforme a Figura 55, cria-se uma reta tangente ao gráfico da função no ponto já anteriormente criado. Dessa forma, você pode entender as inferências da reta tangente ao gráfico da função, que é tão importante.

Figura 55. Criação da Reta Tangente a uma função



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

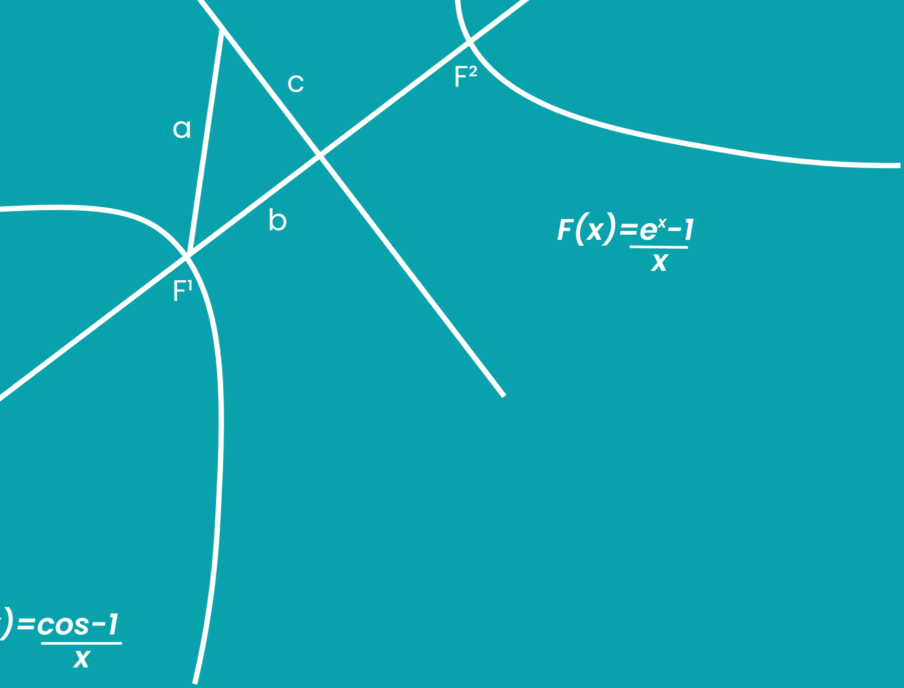
Usando o Quadro 21, pode-se experimentar calcular a derivada de uma função no Software.

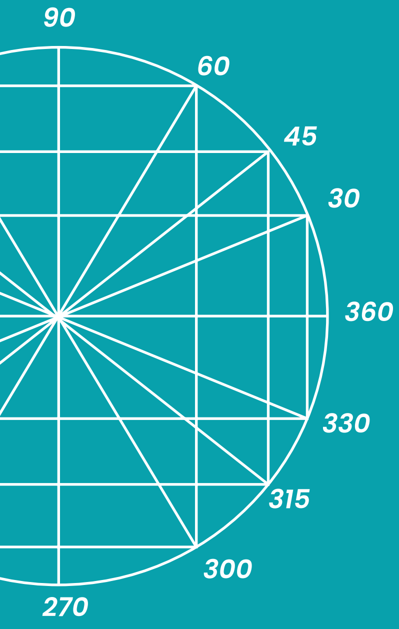
Quadro 21. Comandos no GeoGebra para se calcular Derivadas Sucessivas de funções

Comando	Serve para:
Derivada (<Função>)	Calcular a derivada da função e exibindo-a na Janela de Visualização.
Derivada (<Função>, <Número>)	Calcular a derivada de ordem superior. E este número é a referente à ordem da derivada. Ex.: Derivada segunda, então Número é 2.

Derivada (<Função>, <Variável>)	Calcular a derivada de uma função na variável que se queira.
Derivada (<Função>, <Variável>, <Número>)	Calcular a derivada de ordem superior de uma função na variável que se queira.

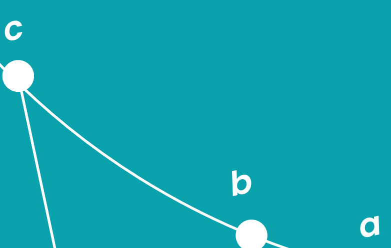
Fonte: Da autora





Aplicações do estudo de Derivadas

Capítulo 04



Neste capítulo, a influência da derivada sobre o gráfico da função ficará bem evidente, o que será de extrema importância identificar onde a função apresenta um ponto mais alto ou mais baixo num determinado intervalo, representando, assim, montanhas e vales existentes naquela região. O estudo das derivadas possibilita determinar tais pontos com precisão, como visto na seção 3.4. Agora, tais descobertas irão se juntar a um problema de otimização, no qual se pretende exibir o ponto ótimo que irá solucionar o problema.

Imagine que você quisesse determinar o relevo de uma determinada área, então, seriam notórios os trechos bem visíveis aos olhos, os quais seriam as montanhas, mas também alguns trechos escuros, representando que naquele lugar existe uma depressão ou vale. Pode-se observar bem esta situação ao analisar a Figura 56, da Cordilheira dos Andes, considerada o mais longo complexo montanhoso do Mundo, que fica localizada na Costa Oeste da América do Sul.

Figura 56. Cordilheira dos Andes: Maior Complexo Montanhoso

Fonte: Unsplash, 2018[11]

Quando se estabelece um comportamento mapeado através de uma função, pode-se determinar tais pontos. Dessa forma, será feito com os problemas de Otimização.

11 Disponível em: https://unsplash.com/pt-br/fotografias/montanhas-glaciares-durante-o-dia-cqbLg3lZEpk

4.1. Pontos Críticos

Definição: [Ponto Crítico] Dada uma função diferenciável, dizemos que $a \in D(f)$ é um ponto crítico da função quando a derivada for nula em a ou a derivada não existir em a.

Observação 11: Exatamente como já analisado na seção 3.5, a reta tangente em um ponto crítico tem o coeficiente angular nulo, se tornando uma reta paralela ao eixo das abscissas.

Destacando a imagem de um ponto crítico, será denominado Valor Crítico, que consequentemente será classificado por: Valor Máximo, Valor Mínimo ou Valor de Sela.

No caso do plote do gráfico, servirá mais um aporte para se determinar os pontos especiais na função, como os vértices e crescimento e decrescimento da função.

Exemplo 22: Sendo f uma função do 2º grau dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Encontre a fórmula para encontrar os pontos críticos da função (Ou mais conhecido como as coordenadas do Vértice da Função do 2º Grau).

Resolução: Como discutido anteriormente, os pontos críticos da função são encontrados quando a derivada da função é nula. Logo:

$$f'(x) = 2ax + b = 0, \text{ o que nos diz que } x_V = -\frac{b}{2a}$$

Substituindo o x_V na função, para encontrar a coordenada y, o qual é chamado também de Valor Crítico:

$$f(x_V) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{ab^2 - 2ab^2 + 4a^2c}{4a^2} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}$$

A seguir, uma das principais contribuições do matemático alemão Gottfried Leibniz e, principalmente, sua notação matemática para a derivada, que se relaciona com taxas de variação. Ao invés da linha sobre a função para identificar a ordem da derivada, se utiliza a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$. Assim, o valor de n será relacionado à ordem da derivada. O simples fato da derivada de primeira ordem ser denotada por um quociente $\frac{dy}{dx}$ já permite identificar com a variação de y em relação à variação de x.

4.2 Influência do sinal da Primeira Derivada sobre a função

Os pontos críticos são classificados a partir do sinal da função derivada, devido ao comportamento da reta tangente, visto na seção 3.5. De acordo a Figura 31, nota-se que, dado um $x \in I, I = (a,b) \in \mathbb{R}$:

- $f'(x) > 0$, isto denotará que o coeficiente angular da reta tangente é positivo e, portanto, a reta tangente será crescente e assim, a função *f* estará crescendo neste determinado intervalo real *I*;
- $f'(x) < 0$, isto denotará que o coeficiente angular da reta tangente é negativo e, portanto, a reta tangente será decrescente e assim, a função *f* estará decrescendo neste intervalo real *I*.

Com tal análise acima, existe uma inferência da derivada sobre o crescimento da função em si.

4.3. Valores Mínimos e Máximos

Definição: Dado um $x \in I$ tal que $f'(x) = 0$, dizemos que $f(x)$ é:

Valor Máximo Local se dado uma vizinhança V_c de c, ou seja, um intervalo centrado em c e uma abertura $\delta \in \mathbb{R}$, ou ainda $(c-\delta, c+\delta)$, suficientemente pequena, tal que $f(c) \geq f(x), \forall x \in V_c$;

Valor Máximo Absoluto se $f(c) \geq f(x), \forall x \in D(f)$;

Valor Mínimo Local se dado uma vizinhança aberta V_c de c, ou seja, um intervalo centrado em c e uma abertura $\delta \in \mathbb{R}$, ou ainda$(c-\delta, c+\delta)$, suficientemente pequena, tal que $f(c) \leq f(x)\ \ \forall x \in V_c$;

Valor Mínimo Absoluto se $f(c) \leq f(x), \forall x \in D(f)$.

Intuitivamente, analisam-se as imagens de todos os elementos dentro de uma vizinhança local, que contenha o ponto em questão. Se nenhuma imagem superar a imagem do ponto escolhido, então ele terá a maior imagem localmente, indicando que ali existe um ponto de máximo local. Isso ocorre de forma semelhante para valores mínimos.

O exemplo a seguir deverá usar métodos diferenciais para exibir o ponto crítico, a partir disso, se terá duas ênfases: o método mais trabalhoso, que é escolher uma vizinhança aberta do ponto e se analisará suas imagens; e o método diferencial, que consiste em analisar a classificação do ponto crítico através do comportamento da derivada e determinar se $f(c)$ será um valor de mínimo ou de máximo.

Partindo para a verificação para saber se $f(c)$ é um ponto de mínimo/máximo absoluto, em ambos os casos, devemos analisar o comportamento da função no infinito, sendo necessário o cálculo de limites no infinito.

Exemplo 23: Estude quanto aos valores mínimos/máximos da função dada por $f(x) = -x^2 + 4x + 6$. Especifique se tal valor é local ou absoluto.

Resolução: A primeira parte da questão é achar o ponto crítico, caso exista. Então, derivando a função *f*, temos:

$$f'(x) = -2x + 4$$

Igualando a função a zero, obtém-se: $x = 2$.

Maneira 1: Construindo-se uma vizinhança aberta em torno do ponto $x = 2$, de raio $\delta = 1$ e com espaçamento de 0,2, conforme o Quadro 22.

Quadro 22. Quadro evidenciando a Vizinhança aberta em torno de $x = 2$ e suas respectivas imagens

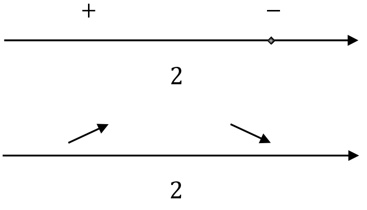
x	$-x^2 + 4x + 6$	(x,y)
1.2	9.36	A
1.4	9.64	B
1.6	9.84	C
1.8	9.96	D
2	10	E
2.2	9.96	F
2.4	9.84	G
2.6	9.64	H
2.8	9.36	I

Fonte: App Suíte GeoGebra Gráfica – Planilha

Assim, pode constatar que o ponto $x = 2$ em questão é um ponto de máximo, pois nessa vizinhança nenhuma imagem próxima superou a imagem de $x = 2$.

Esta é a maneira um pouco mais trabalhosa, se for realizada à mão livre, mas se for com o uso de software educacional, será mais prático.

Maneira 2: Uma vez que o ponto $x = 2$ é um ponto crítico, irá se determinar o estudo de sinal da função derivada $f'(x) = -2x + 4$. No capítulo 1, foi explorado muito sobre o comportamento de tais funções. Sabendo que a reta é decrescente, à esquerda de $x = 2$, o sinal da função é positivo, que será simbolizado por uma seta, e à direita a função é decrescente, que será simbolizado por uma seta. Então, temos:



$\boldsymbol{f'}$ (Sinal da Derivada)

$\boldsymbol{f}$ (Comportamento da função)

De acordo com a análise da interferência da derivada sobre a função acima, diz-se que $x = 2$ é um ponto de máximo local. Substituindo o ponto $x = 2$ na função *f*, obtém-se $f(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 6 = -4 + 8 + 6 = 10$.

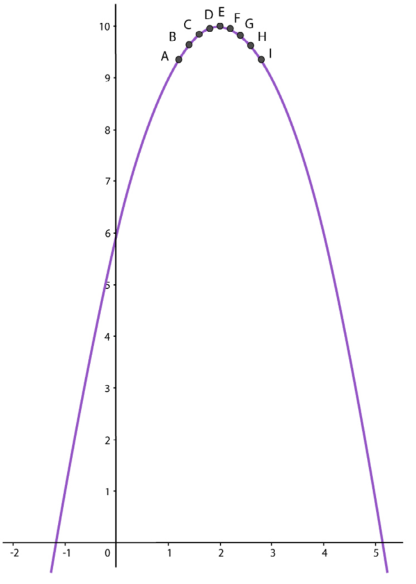
De uma maneira ou outra, acaba-se por achar que 10 é o valor máximo local da função. Mas já sabíamos disso, pois no capítulo 1 estudamos a função quadrática, e como o coeficiente $a < 0$, o gráfico de tal função é uma parábola com concavidade para baixo e seu gráfico não muda no infinito.

Porém, para efeito de cálculo, o limite no infinito da função *f* será:

$$\lim_{x \to \pm\infty} -x^2 + 4x + 6 = -\infty.$$

Indicando que o ponto (2,10) é um ponto de máximo absoluto, cujo gráfico é realizado na Figura 57.

Figura 57. Gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ exibindo os pontos de acordo com o Quadro 21



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

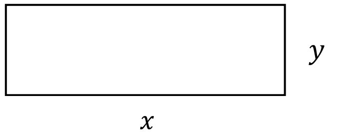
4.4. Problemas de Otimização

Definição: [Problemas de Otimização] Os problemas de otimização são caracterizados por uma função objetivo que, neste caso, depende de duas variáveis e está sujeita a uma restrição representada por uma equação envolvendo essas mesmas variáveis. A ideia é transformar a função objetivo para que ela dependa apenas de uma variável. Assim, com o auxílio do estudo diferencial, é possível determinar seus pontos críticos, classificá-los e identificar o ponto ótimo que solucionará o problema.

De modo geral, problemas de otimização visam maximizar ou minimizar a função objetivo. Contudo, na Engenharia Elétrica, destaca-se a procura do ponto de sela. Além disso, existem outros métodos para determinar os pontos ótimos da função. Por exemplo, na Engenharia de Produção, a disciplina de Pesquisa Operacional faz a determinação do ponto ótimo.

Exemplo 24: Encontre o retângulo de maior área possível.

Resolução: É preciso identificar a função objetivo e a restrição. Para isto, um desenho da situação já melhora a percepção.



Observando a figura com as dimensões já dispostas, podemos dizer que a função objetivo é a área e a restrição é o perímetro do retângulo ou o semiperímetro *p* dado.

$$\mathrm{A}\ (x, y) = xy \qquad (23)$$

E:

$$x + y = p \qquad (24)$$

Como já citado anteriormente, o objetivo é transformar a função *A* para depender apenas de uma única variável. Assim, isolando y na equação (24) e substituindo na função dada em (23), obtém-se:

$$A(x) = x(p - x) = xp - x^2$$

A fim de obter o(s) ponto(s) crítico(s):

$$A'(x) = 0$$

O que resulta em:

$$-2x + p = 0$$

Ou seja, $x = \frac{p}{2}$.

Uma vez que a função $A = A(x)$ é uma função quadrática com coeficiente $a < 0$, temos que o ponto de abscissa $x = \frac{p}{2}$ é um ponto de máximo local da função. Como os limites infinitos para $+\infty$ e $-\infty$ convergem para $-\infty$, constata-se que é um ponto de máximo global.

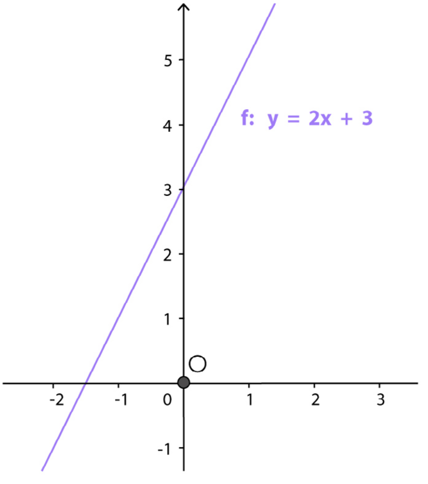
Desta forma, substituindo x na restrição (23), tem-se o valor de $y = \frac{p}{2}$. Isto comprova que o retângulo de maior área possível é um quadrado!

Vários outros problemas podem ser contextualizados e resolvidos através de Problemas de Otimização. O exemplo a seguir é um problema que também pode ser resolvido através de métodos vistos na disciplina de Álgebra Linear, que é o Tópico de Distâncias.

Exemplo 25: Determine o ponto sobre a reta $y = 2x + 3$ que está mais próximo da origem.

Resolução: Analisando o gráfico e a situação, conforme a Figura 58, percebe-se que existem vários pontos sobre a reta que têm uma distância, mas qual delas será a menor?

Figura 58. Gráfico da Função $f(x) = 2x + 3$ e a situação proposta no Problema



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Claramente, a função objetivo neste caso é a função distância. Por simplicidade dos cálculos, deve-se trabalhar com a função distância ao quadrado.

$$f(x, y) = dist^2(x, y) = (x - 0)^2 + (y - 0)^2$$

Cuja restrição são os pontos sobre a reta $y = 2x + 3$. Substituindo a restrição na função distância $dist^2$, obtém-se:

$$f(x) = x^2 + (2x + 3)^2 = x^2 + 4x^2 + 12x + 9 = 5x^2 + 12x + 9$$

Buscando o ponto crítico da função $dist^2$:

$$f'(x) = 10x + 12 = 0$$

Assim, tem-se $x = -\dfrac{6}{5}$.

Uma vez que a função objetivo "$f(x)$" é uma função quadrática com coeficiente $a > 0$, seu gráfico é representado por uma parábola com concavidade voltada para cima, como visto no Capítulo 1. Logo, o ponto de abscissa $x = -\frac{6}{5}$ é um ponto de mínimo global, pois os limites no infinito de tal função convergem para $+\infty$.

Assim, $y = 2\left(-\frac{6}{5}\right) + 3 = \frac{3}{5}$. Portanto, a distância é:

$$dist = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = 1{,}34\ u.c.$$

Caso a resolução fosse abordada pela Álgebra Linear, a equação da reta poderia ser escrita na forma reduzida em relação à variável x, dada por $y = 2x + 3$. A partir dessa equação, podem-se extrair as informações pertinentes à reta vetorial:

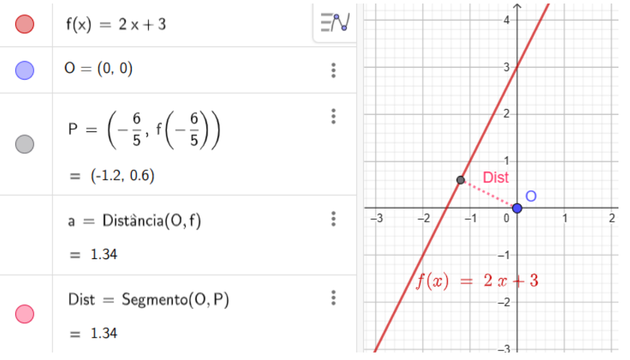
Vetor diretor da retaV: $\overrightarrow{v_r} = (1{,}2)$;
Ponto pertencente à reta: $P_r = (0{,}3)$.

A distância de um ponto à reta é determinada geometricamente pela razão entre a área do paralelogramo formado pelo vetor diretor $\overrightarrow{v_r}$ e o vetor $\vec{v} = \overrightarrow{P_r O}$, e a base do paralelogramo, que é o módulo do vetor diretor $|\overrightarrow{v_r}|$. Logo:

$$dist(O,r) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \times \vec{v}|}{|v_r|} = \frac{|(0{,}0{,}3)|}{|(1{,}2)|} = \frac{3}{\sqrt{1+4}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = 1{,}34\ u.c$$

Para a constatação visual no software GeoGebra, utilizando a função distância (<Ponto>, <Objeto>) na barra de ENTRADA, depois de ter colocado a função e o ponto no plano, a resposta pode ser visualizada na Janela de Álgebra com duas casas decimais, como ilustrado na Figura 59.

Figura 59. Visualização do gráfico da função e o ponto na Janela de Visualização 2D e na Janela Algébrica



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

4.5. Influência da Função Derivada Segunda sobre a Função

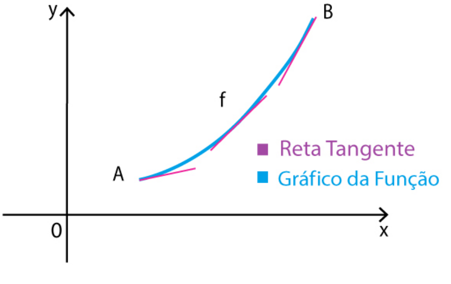
Assim como existe a influência da primeira derivada da função sobre o gráfico da função *f*, pode-se examinar a situação da influência da segunda derivada da função.

Definição: Sejam $x \in I = [A, B] \subset \mathbb{R}$ e f uma função real diferenciável em I. Dizemos que f tem concavidade para cima (Ver Figura 60), se:

$$T(x) < f(x), \forall x, p \in I, com\ x \neq p$$

Onde $T(x) = f(p) + f'(p)(x - p)$ é a reta tangente à f no ponto.

Figura 60. Exibição de uma função cujas retas tangentes ficam sempre por baixo do gráfico de f



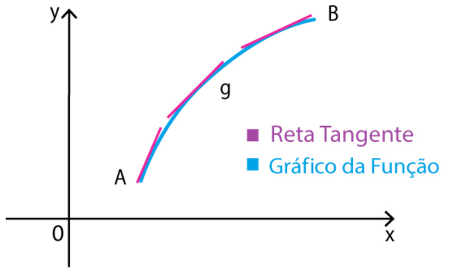
Fonte: Stewart, 2013

Definição: Sejam $x \in I = [A, B] \subset \mathbb{R}$ e f uma função real diferenciável em I, dizemos que f tem concavidade para baixo, se:

$$T(x) > f(x), \forall x, p \in I, com\ x \neq p$$

Onde $x \in I = [A, B] \subset \mathbb{R}$ é a reta tangente à f no ponto p.

Figura 61. Exibição de uma função cujas retas tangentes ficam sempre acima do gráfico de f



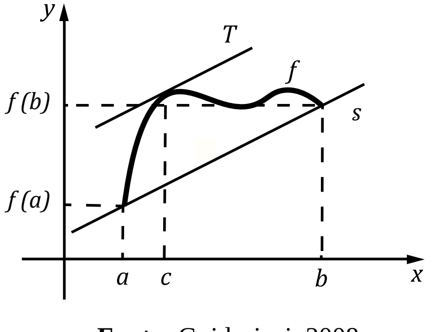
Fonte: Stewart, 2013

Teorema: [Teorema do Valor Médio - TVM] Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um $c \in (a, b)$, tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad (25)$$

Geometricamente, pode ser analisada a Figura 62, dada uma reta passando pelos extremos do intervalo $[a, b]$, onde existirá uma reta tangente ao gráfico da função f, que possuirá o mesmo coeficiente angular da reta secante.

Figura 62. Esquema geométrico do TVM



Fonte: Guidorizzi, 2008

A seguir, dois exemplos para análise analítica e gráfica. O primeiro demonstra que o valor médio que atende ao TVM corresponde ao ponto médio do intervalo considerado - funções quadráticas. O segundo exemplo evidencia que pode existir mais de um valor *c* que satisfaz o TVM - funções cúbicas.

Exemplo 26: Usando o Teorema do Valor Médio para a função $f(x) = x^2$ no intervalo $0 \leq x \leq 3$, determine o(s) valor(es) de *c*. Expresse graficamente este fato.

Resolução: Pelo TVM, uma vez que a função quadrática é derivável em (0,3) e é contínua em [0,3], sabe-se que será satisfeita a Equação (25) no intervalo dado:

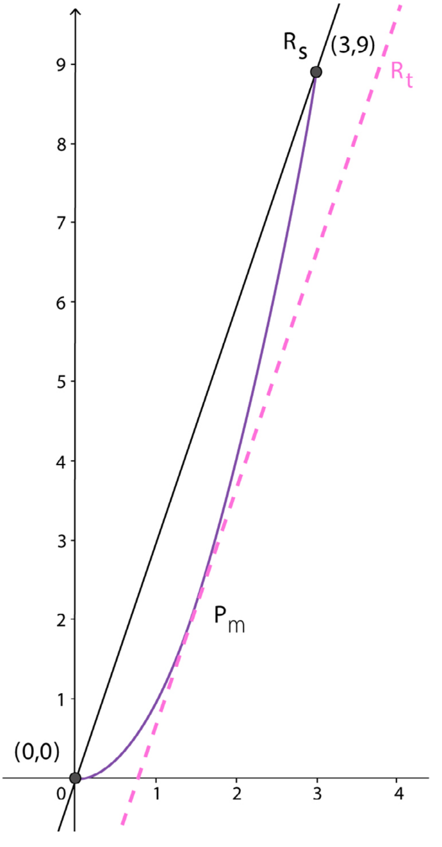
$$f'(c) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0}$$

Substituindo as imagens: $f(3) = 3^2 = 9$ e $f(0) = 0^2 = 0$ e a derivada da função, tem-se:

$$2c = \frac{9 - 0}{3} = 3$$

Logo, $c = \frac{3}{2}$, o qual é o ponto médio do intervalo [0,3].

Figura 63. Esquema gráfico da função $f(x) = x^2$ no intervalo [0,3] e a reta tangente ao gráfico dada pelo TVM



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Exemplo 27: Usando o TVM para a função $f(x) = x^3 - 2x$ no intervalo de [-2,2], determine o valor de *c*. Expresse graficamente este fato.

Resolução: Uma vez que a função está nas condições do TVM, usa-se a Equação (25) para determinar o(s) valor(es) de *c*.

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

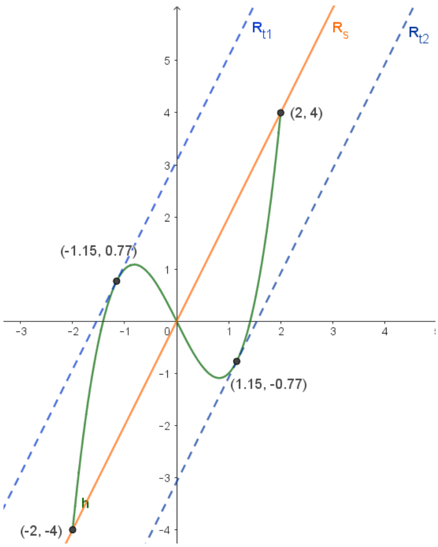
$$3c^2 - 2 = \frac{4 - (-4)}{4} = \frac{8}{4}$$

$$c^2 = \frac{4}{3}$$

$$c = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Mostrando-se, assim, que existem duas retas que tangenciam o gráfico de *f*, com a mesma inclinação da reta secante, que passa pelos extremos do intervalo [-2,2].

Figura 64. Esquema gráfico da função ( ) definida em [-2, 2] e as retas tangentes ( ) ao gráfico de que possuem a mesma inclinação da reta secante ( ) que passa pelos extremos do intervalo dado



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Utilizando o Teorema do Valor Médio, pode-se destacar as seguintes inferências a respeito da segunda derivada.

Definição: [Teste da 2ª Derivada]

Se $f''(x) > 0$ em todo *I*, então *f* terá concavidade voltada para cima em *I*;

Se $f''(x) < 0$ em todo *I*, então *f* terá concavidade voltada para baixo em *I*;

Se $f''(p) = 0$ e, além disso, existirem números reais, como $p \in (a, b) \subset D(f)$, tal que f tenha concavidades contrárias em (a, p) e (p, b), então p é um ponto de inflexão.

Aqui, serão exibidos dois exemplos: uma função cúbica contida no Capítulo 1 e outra Função Racional, para que o leitor consiga entender a influência da 2ª Derivada sobre a função.

Exemplo 28: Seja $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, construa o seu gráfico usando as informações geradas a partir das influências da 1ª Derivada e 2ª Derivada.

Resolução: Primeiramente, calcula-se a 1ª Derivada. Assim, examinaremos os pontos críticos e intervalos de crescimento e decrescimento.

Calculando a 1ª Derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

Assim, os pontos críticos, caso existam, serão:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

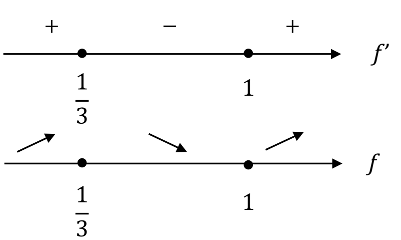
Calculando o discriminante: $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 16 - 12 = 4 > 0$.

As raízes são:

$$x = \begin{cases} \dfrac{4+2}{6} = 1 \\ \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Portanto, a função possui 2 pontos críticos.

Agora, analisando o sinal da 1ª Derivada, que vem da análise do sinal da função derivada $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$:



Analisando os intervalos, percebe-se que $x = \frac{1}{3}$ é um ponto de máximo local e $x = 1$ é um ponto de mínimo local.

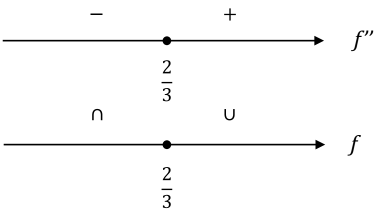
Fazendo a 2ª Derivada, considerando que este é um processo recursivo:

$$f''(x) = 6x - 4$$

Então, o ponto de inflexão será:

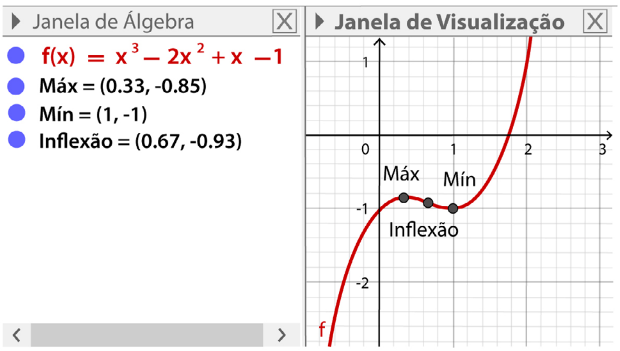
$$6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Fazendo a análise do sinal da segunda derivada $f''(x) = 6x - 4$, que é uma função linear crescente, obtém-se:



Após as duas análises, obtém-se o gráfico apresentado na Figura 65, no qual é possível verificar visualmente que o ponto de inflexão divide as concavidades à esquerda e à direita em uma vizinhança aberta do ponto de abscissa $x = \frac{2}{3}$.

Figura 65. Gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ contendo os pontos de Máximo e Mínimo Locais e Ponto de Inflexão



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Exemplo 29: Plote o gráfico da função racional $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, evidenciando os pontos de mínimos e máximos locais e globais e o ponto de inflexão, caso existam.

Resolução: De acordo com a seção 2.1, que abordou as funções racionais, é necessário destacar, entre outros aspectos, as assíntotas existentes a partir dos limites laterais. Começa-se destacando o domínio de *f*, a saber:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 1\}$$

Em seguida, calcula-se os limites laterais à esquerda e à direita, quando *x* converge para 1, que é a única restrição da função.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{(x-1)} = \frac{1}{(0^-)} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)} = \frac{1}{(0^+)} = +\infty$$

Indicando que há uma assíntota vertical em *x* = 1.

Agora, verifica-se a influência da 1ª Derivada sobre a função, utilizando a regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Nesta análise, leva-se em conta que, como $(x-1)^2$ é uma função positiva, analisaremos os pontos críticos resolvendo:

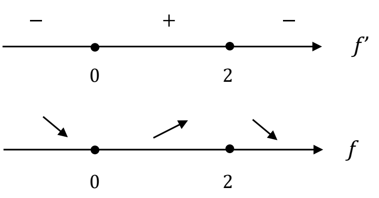
$$x^2 - 2x = 0$$

Ou, ainda:

$$x(x-2) = 0$$

Dessa forma, as raízes são $x = 0$ e $x = 2$. Assim, os pontos críticos da função são $x = 0$ e $x = 2$.

Analisando o gráfico da derivada e considerando novamente que $q(x) = (x-1)^2$ é positiva, tem-se:

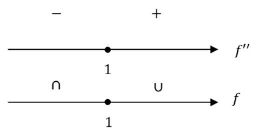


Com o diagrama acima, percebe-se que 0 é o ponto de mínimo local e 2 é o ponto de máximo local.

Agora, levando-se em consideração a segunda derivada, obtém-se:

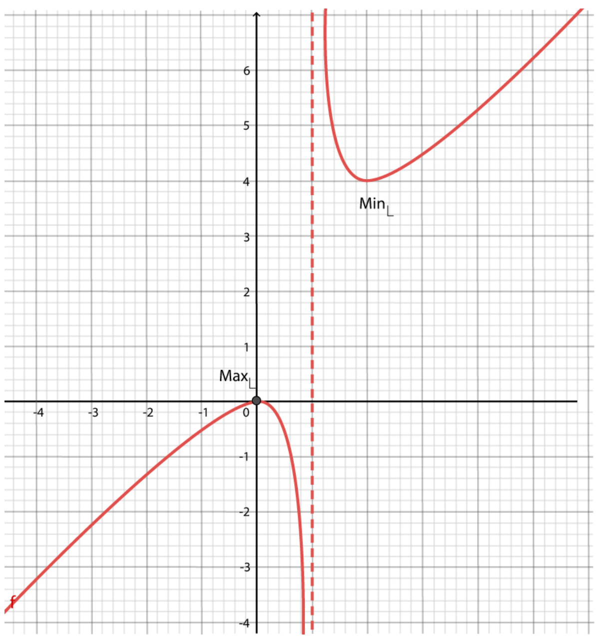
$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{(x-1)[2(x-1)^2 - 2(x^2-2x)]}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{2(x^2-2x+1) - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

Analisando o sinal da função 2ª Derivada, considerando que $p_1(x) = 2$ é toda positiva, e $q(x) = (x-1)^3$, por ser cúbica, é crescente, tem-se:



Neste caso, não há um ponto de inflexão, devido à função ser desconexa e representar uma hipérbole, mas verifica-se a concavidade, conforme a Figura 66.

Figura 66. Gráfico da Função $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

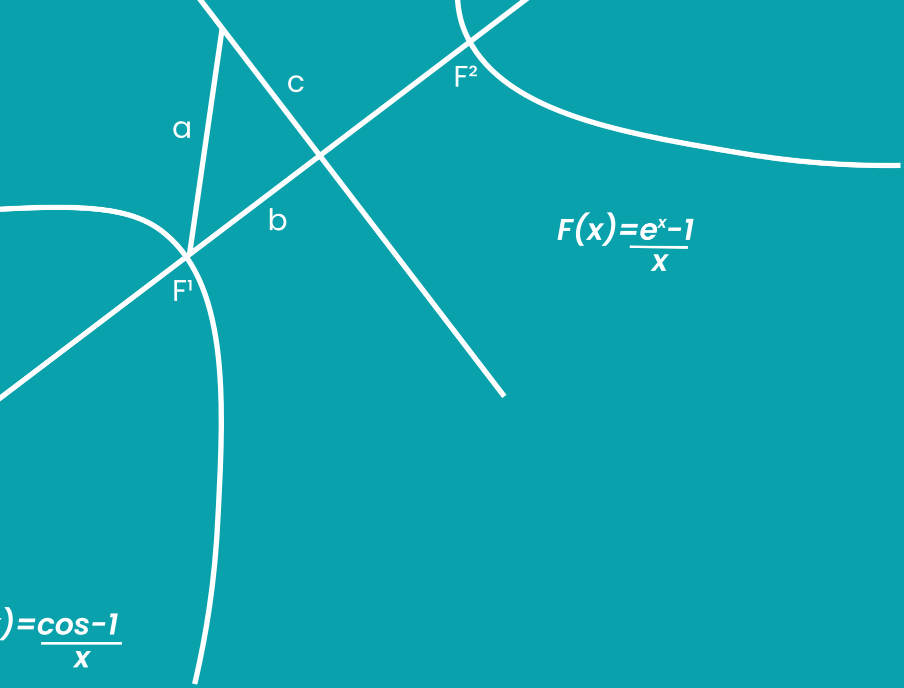
4.6. Alguns Importantes Comandos no GeoGebra: Mínimos e Máximos

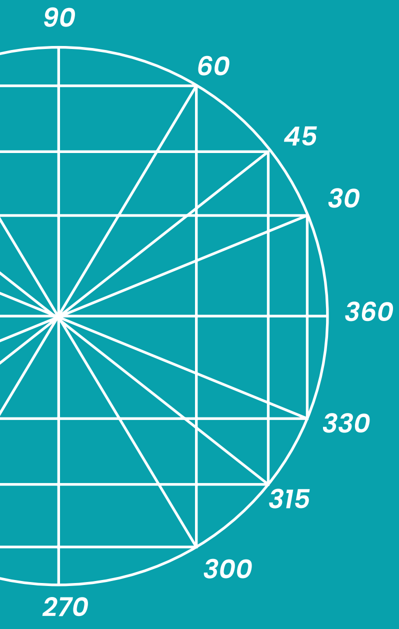
Após o traço do gráfico plotado no GeoGebra, é importante destacar alguns pontos importantes no gráfico, como os pontos de máximo e mínimo, destaque das assíntotas e ponto de inflexão. O quadro a seguir destaca alguns comandos que podem auxiliar.

Quadro 23. Comandos no Software GeoGebra para identificar pontos importantes no gráfico de uma função

Comando	Para que serve?
Extremo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)	Identifica os pontos extremantes da função num determinado intervalo
Máximo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)	Identifica o(s) ponto(s) de máximo(s) da função num determinado intervalo
Mínimo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)	Identifica o(s) ponto(s) de mínimo(s) da função num determinado intervalo
Assíntota(<Objeto>)	Identifica as Assíntotas presentes no gráfico, sendo Verticais, Horizontais e Oblíquas

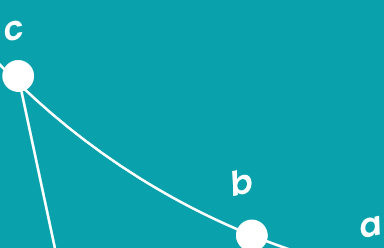
Fonte: Da autora





Integrais

Capítulo 05



As integrais desempenham um papel super importante no cálculo de áreas de figuras com formatos circulares, sendo o cálculo da área do círculo um exemplo clássico. Este cálculo foi inicialmente aproximado pelos matemáticos Eudoxo de Cnido e Euclides de Alexandria, que inscreveram um polígono regular dentro do círculo - conhecido como Método da Exaustão, destacando que a área de qualquer círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro. Posteriormente, foi Arquimedes de Siracusa quem avançou no estudo das propriedades geométricas, incluindo o valor de π. Mais adiante, Gottfried Wilhelm Leibniz e a Isaac Newton desenvolveram um corpo teórico sobre o cálculo diferencial e integral, possibilitando o cálculo de áreas e volumes sem que fosse necessário calcular a área ou volume, como limites de soma, método descrito pelo matemático Riemann, pupilo de Gauss.

Definição: [Primitivas] Uma função $F(x)$ é dita primitiva de $f(x)$ se:

$$F'(x) = f(x), \forall x \in D(f)$$

Exemplo 30: Dada a função $f(x) = x$, qual é a sua primitiva?

Resolução: Com base na Regra de Derivação (Seção 3.3), pode-se constatar que a Primitiva de $f(x) = x$ é:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

Teorema: Sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, então $F(x) + k$ também será.

Prova: A demonstração deste fato é bem direto, pois:

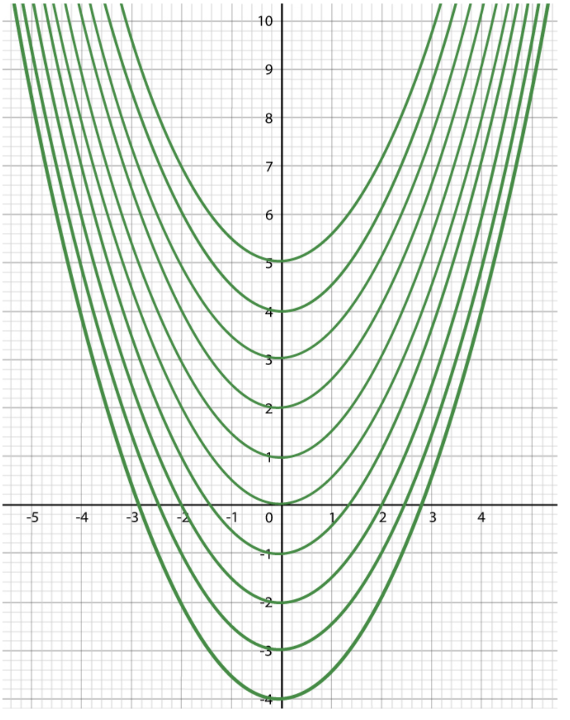
$$(F(x) + k)' = F'(x) + k' = f(x) + 0 = f(x)$$

A última igualdade é garantida pela hipótese.

No caso do Exemplo 30, podemos ter uma família de primitivas para a função $f(x) = x$, como ilustrado na Figura 65.

Figura 67. Família de Primitivas da função $f(x) = x$, que são da forma

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + k, k = constante$$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

A cada constante adicionada, temos uma nova função. E essa família de funções primitivas da função é o que chamamos de Integral Indefinida, $\int f(x)dx$.

5.1. Propriedades de Integrais Indefinidas

Como identificado acima, o cálculo de uma primitiva está associado a uma função derivada. Como uma herança as propriedades de integração podem ser destacadas a seguir.

Definição: [Propriedades da Integral Indefinida] Admitindo que *f*, *g* são funções integráveis e *k*, *c* constantes, são válidas as seguintes propriedades:

i) $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + c$

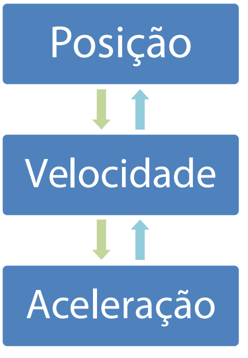
ii) $\displaystyle\int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + c$

iii) $\displaystyle\int kf(x)dx = k \int f(x)dx = kF(x) + c$

Observação 12: É necessário adicionar ao final apenas uma constante, uma vez que a soma de constantes ainda é uma constante e a demonstração é feita de maneira direta.

Uma das aplicações mais diretas da integração indefinida é a determinação da velocidade e aceleração, como pode ser observado no Esquema de Posição-Velocidade-Aceleração visto na Física (Ver Diagrama 1).

Diagrama 1. Esquema Posição-Velocidade-Aceleração na Física



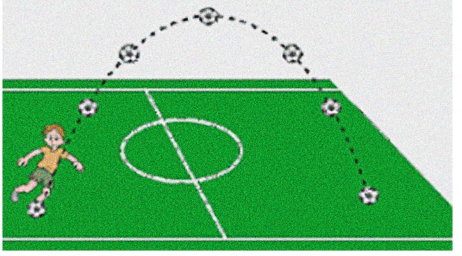
Fonte: Da autora

Onde a seta ↓ simboliza a derivada e a seta ↑ simboliza a integral. Esses problemas, em particular, são chamados de Problemas de Valores Iniciais - PVI, os quais estão atrelados a uma solução particular. No caso da situação visualizada na Figura 57, para se "amarrar" a uma única solução, é necessário conhecer um valor inicial.

No exemplo a seguir, partindo de um PVI, que será mais detalhadamente trabalhado na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias - EDO, pode-se resolver uma equação que envolve derivadas ou diferenciais de funções. Assim, obtém-se a função que satisfaz a dada Equação Diferencial, permitindo saber o comportamento da função em qualquer outro valor desejado.

Exemplo 31: Sabendo que a velocidade de uma bola é descrita pela função $v(t) = 5t + 4$ e que a posição inicial da bola é nula, determine a posição da bola após 2 segundos. Considere que t é o tempo em segundos.

Figura 68. Movimento parabólico da bola



Fonte: Felipe Rocha, 2016[12]

Resolução: Sabendo que a velocidade é dada pela derivada da função posição, temos $v = \frac{dx}{dt}$. Então, a equação diferencial é definida como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5t + 6 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

Integrando a EDO:

$$\int \frac{dx}{dt}\, dt = \int (5t + 6)\, dt$$

A partir do diagrama 1, obtemos:

$$x(t) = -5\frac{t^2}{2} + 6t + k$$

A função posição $x = x(t)$ está determinada a menos da constante k. Para determinar a curva por completo, utiliza-se o valor inicial fornecido no PVI.

$$0 = x(0) = -5\frac{0^2}{2} + 6.0 + k$$

12 Disponível em: https://profes.com.br/felipes.rocha/blog/lancamento-obliquo-e-o-futebol

De onde se conclui que $k = 0$. Portanto, a função posição é $x(t) = -5\frac{t^2}{2} + 6t$.
Logo, $x(2) = -5\frac{2^2}{2} + 6.2 = 2$.

Então, a bola estará na posição de 2 metros, passados 2 segundos.

5.2. Integral Definida

A integral definida admite os intervalos de variação da variável da função, e o resultado obtido é, naturalmente, um número real. Em alguns casos, este número pode ser associado à área, quando a função no integrando for positiva, i.e, $f(x) > 0$. Caso seja nula, significa que a parte compreendida da função tem porções iguais, porém com sinais contrários. Se o resultado for negativo, isso indica que, neste intervalo, a função tem sinal negativo.

Com o auxílio do Teorema Fundamental do Cálculo - TFC, é possível calcular a integral definida de uma função em um determinado intervalo, como mostrado a seguir:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \in \mathbb{R}$$

5.3. Soma de Riemman

A área entre o gráfico de uma função e o eixo das abscissas pode ser aproximada utilizando a Soma de Riemman. Esse método consiste em dividir o intervalo do eixo das abscissas e considerar o extremo (inferior, superior ou central) da função. A base dos retângulos é dada por $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, e a altura pode ser $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ ou $f(x_m)$, sendo x_mo ponto médio entre x_i e x_{i+1}.

Exemplo 32: Estime a área compreendida entre a função $f(x) = x^2$ e as retas $x = 0$ e $x = 3$, tomando em 6 o número de partições, superiormente e inferiormente.

Resolução: Verifica-se primeiramente cada subintervalo da partição, e esta variação Δx_i será exatamente o tamanho da base do retângulo a ser formado, que será de 0,5 cada.

Quadro 24. Verificação das partições

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Fonte: Da autora

Então, temos os tamanhos representados pelos segmentos: $\overline{x_0x_1}$, $\overline{x_1x_2}$, $\overline{x_2x_3}$, $\overline{x_3x_4}$, $\overline{x_4x_5}$ e $\overline{x_5x_6}$, os quais serão as bases dos 6 retângulos a serem construídos. No caso da Soma de Riemann Inferior, considere cada extremo do segmento como a imagem inferior, fazendo com que os retângulos criados fiquem abaixo do traço do gráfico.

Por exemplo, tomando o primeiro retângulo de base $\overline{x_0x_1}$, verifica-se a imagem do $x_0 = 0$, que neste caso é 0, e a imagem do $x_1 = 0{,}5$, que é 0,25, logo, a altura dada prevalece por x_0. Perceba no gráfico (Figura 69), que se fosse validada a altura pela imagem de x_1, o retângulo estaria acima do gráfico da função.

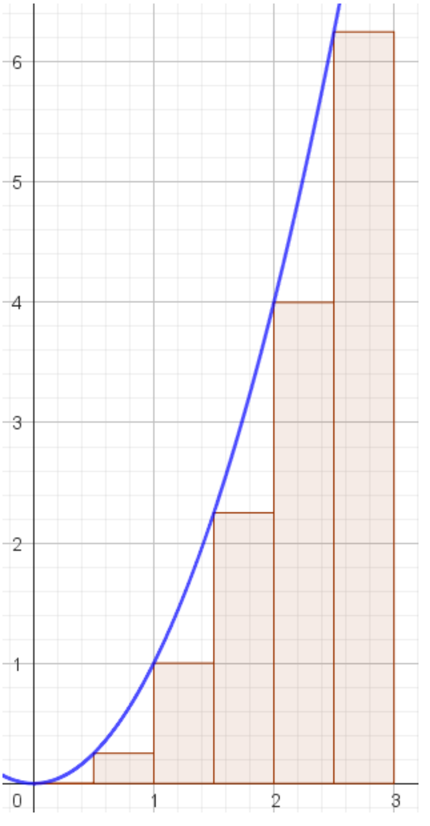
Quadro 25. Estimativa da área compreendida entre o gráfico da função $f(x) = x^2$ e as retas dadas no Exemplo 32

Base	**Altura**	**Área do Retângulo**
$\overline{x_0x_1} = 0{,}5$	$f(x_0) = 0$	$A_1 = 0$
$\overline{x_1x_2} = 0{,}5$	$f(x_1) = 0{,}25$	$A_2 = 0{,}125$
$\overline{x_2x_3} = 0{,}5$	$f(x_2) = 1$	$A_3 = 0{,}5$
$\overline{x_3x_4} = 0{,}5$	$f(x_3) = 2{,}25$	$A_4 = 1{,}125$
$\overline{x_4x_5} = 0{,}5$	$f(x_4) = 4$	$A_5 = 2$
$\overline{x_5x_6} = 0{,}5$	$f(x_5) = 6{,}25$	$A_6 = 3{,}125$
Área Total		$A_t = 6{,}875\text{c}$

Fonte: Da autora

Esta seria a área abaixo do gráfico e compreendida entre as retas e, majorada por baixo.

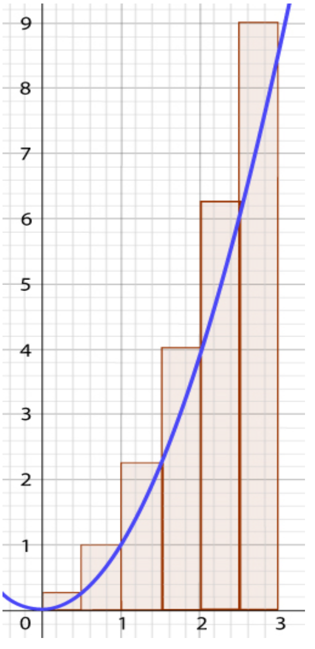
Figura 69. Soma de Riemman Inferior da função $f(x) = x^2$, com $0 \leq x \leq 3$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Esse mesmo mecanismo poderia ser feito por cima, tomando agora, entre cada segmento, a altura que representa a maior imagem pela função tomada nos pontos extremos.

Figura 70. Soma de Riemman Superior da função $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq 3$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Procedendo de maneira análoga, pode-se constatar que a área majorada por cima é de 11,370.

Assim, temos uma margem de aproximação da área procurada:

$$6{,}875 \leq A \leq 11{,}370 \qquad (26)$$

Este procedimento realizado no Exemplo 29 pode ser feito com o ponto médio entre cada segmento $\overline{x_i x_{i+1}}$, e assim, obter uma estimativa mais próxima da verdadeira.

Dessa forma, nasceram as estimativas para a área entre gráfico de funções. Mas, foi somente com o Teorema do Valor Médio que se formulou, através do cálculo integral, a área compreendida entre o gráfico de uma função e entre retas.

Note, também, que para tal estimativa, considera-se uma função positiva. Caso seja negativa, é preciso considerar o resultado em módulo.

Uma maneira mais eficaz de utilizar tal mecanismo de aproximação de áreas é utilizando o Teorema do Valor Médio para a função primitiva $F(x)$, visto na seção 5.1. Analisando o seguinte fato:

Como F é uma função definida em $[a, b]$ e derivável em (a, b), na qual é a primitiva de $f(x)$, pelo TVM, vale:

$$F(b) - F(a) = F^{'}(c)(b - a)$$

Contudo, como F é primitiva de f, vale $F^{'}(x) = f(x) \forall x \in [a, b]$, sendo:

$$F(b) - F(a) = f(c)(b - a) \quad (27)$$

Intuitivamente, do lado direito da equação, pensando na partição do intervalo $[a, b]$, obtemos o valor da área ao somar todos os subintervalos da partição. Desse modo, associamos a área compreendida entre o gráfico da função, dentro de um intervalo, à integral definida, como descrito a seguir:

Teorema: [Teorema Fundamental do Cálculo -TFC] Se f for integrável em $[a, b]$ e F uma primitiva de f em $[a, b]$, então:

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (28)$$

Demonstração: Ver [2].

Exemplo 33: Calcule a área compreendida entre o gráfico da função $f(x) = x^2$ e as retas $x = 0$ e $x = 3$.

Resolução: Usando a Equação (27), tem-se:

$$A = \int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$$

Observação 13: Perceba que a área exemplificada no Exemplo 33 trata da mesma função e no mesmo intervalo que o Exemplo 32, o que justifica as aproximações pela Soma de Riemann Inferior e Superior, conforme a Equação (26).

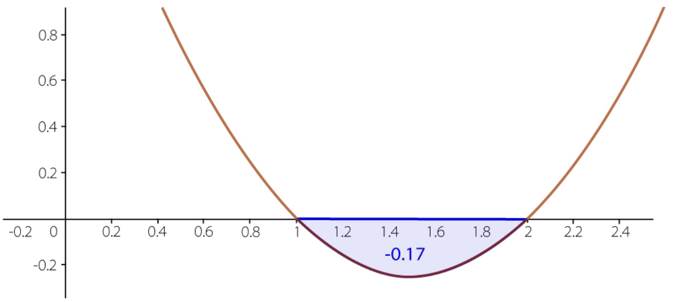
Exemplo 34: Calcule a integral definida $\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx$ e a interprete geometricamente.

Resolução: Ao utilizar a propriedade de integração, em relação à soma e à multiplicação por escalar no integrando, e após exibir a primitiva, executaremos o Teorema Fundamental do Cálculo, conforme apresentado a seguir:

$$\int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 2\,x\Big|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + 2.2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 3\frac{1^2}{2} + 2.1\right)$$
$$= \frac{7}{3} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{14 - 27 + 12}{6} = -\frac{1}{6}$$

Observação 14: Ao interpretar o cálculo através do gráfico da função dada no Exemplo 34, conforme a Figura 71, percebe-se, naturalmente, que no intervalo de 1 a 2, na abscissa, a função tem o sinal negativo, o que ocasionalmente constata o porquê do sinal negativo no resultado da integral definida.

Figura 71. Gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = x^2 = 3x + 2}$, com parte hachurada em azul (área que está abaixo do Eixo das Abscissas)



Fonte: App Suíte GeoGebra – Classic

Algumas propriedades de integrais aparecem na forma de técnicas, que se resumem quando no integrando existe um produto de funções ou funções compostas, ou até mesmo um quociente de funções.

5.4. Técnicas de Integração

As técnicas de integração compreendem quatro modelos, que são eles:

- Integração por Meio Direto: é realizada por meio do Teorema Fundamental do Cálculo;
- Integração por Substituição: Simples e Trigonométrico: em geral, quando há funções compostas no integrando;
- Integração por Partes: quando existe um produto de funções no integrando;
- Integração por Frações Parciais: quando há um quociente de funções.

5.4.1 Integração por Meio Direto

Usando a tabela de derivação, conforme a seção 3.3, aplica-se a integral de ambos os lados.

Exemplo 35: Sabendo que vale a regra de derivação:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad (27)$$

Integrando a equação (24) à variável *x*, tem-se:

$$\int \frac{d}{dx}(x^n)dx = \int nx^{n-1}\, dx$$

Resultando em:

$$\frac{x^n}{n} = \int x^{n-1}\, dx$$

Reindexando:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

Isso também vale para as funções trigonométricas.

Exemplo 36: A derivada da função *senx* é a função *cos x*. Logo:

$$\int \frac{d}{dx} senx\, dx = \int cosx\, dx$$

Aplicando TFC do lado esquerdo, tem-se:

$$\int cosx\, dx = senx + k$$

Pode-se, assim, construir uma tabela contendo, a partir das derivadas, as integrais:

Quadro 26. Tabela de Integrais diretas

Função	Primitiva
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$sen\ x$	$-\cos x$
$\cos x$	$sen\ x$
e^x	e^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$

Fonte: Da autora

Do mesmo modo para as funções em que foram utilizadas as propriedades de derivação, como na tabela a seguir:

Quadro 27. Tabela de Integrais diretas provindas das Propriedades de Derivação

Função	Primitiva
$\sec^2 x$	$\tan x$
$\tan x \sec x$	$\sec x$
$-cotan\ x\ cossec\ x$	$cossec\ x$
$-cossec^2\ x$	$cotan\ x$

Fonte: Da autora

5.4.2 Integração por Substituição Simples

A substituição simples, como o próprio nome já diz, utiliza uma variável auxiliar que, em geral, adota a letra *u*, e substitui todo o integrando e os seus respectivos limites de integração em relação à variável *u*. No integrando, tem-se uma função composta e a substituição a qual, na maioria das vezes, propõe a substituição como a função interna.

Exemplo 37: Calcule a integral $\int_0^2 \sqrt{3x+1}dx$.

Resolução: Percebe-se que, no integrando, tem-se uma função composta, e que no caso de derivar tal função, é necessário usar a Regra da Cadeia.

Assim, faz-se a substituição simples, por:

$$u = 3x + 1 \qquad (28)$$

Porém, ainda será necessário trocar o elemento infinitesimal, *dx*. Usando a notação de Leibniz, derivamos a equação (28):

$$\frac{du}{dx} = 3$$

Ou ainda, $dx = \frac{du}{3}$. Trocando a integral:

$$\int_1^7 \sqrt{u}\frac{du}{3}$$

Entretanto, existe a variação, que deve ser substituída pela variação na variável auxiliar *u*.

Logo, para $x = 0$, a equação (28) resulta em $u = 1$, e para $x = 2$, a equação (28) resulta em $u = 7$.

Calculando a integral definida com a substituição total, tem-se:

$$\int_1^7 \sqrt{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int_1^7 u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Bigg|_1^7 = \frac{2}{9}\left(7^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{9}\left(\sqrt{7^3} - 1\right) = \frac{2}{9}\left(7\sqrt{7} - 1\right).$$

5.4.3 Integração por Substituição Trigonométrica

A substituição trigonométrica consiste em usar, em particular, a Equação Fundamental da Trigonometria, onde θ simboliza um ângulo visto na seção 1.5, a saber:

$$sen^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad (29)$$

Bem como as que são derivadas de (27), dividindo por $sen^2\theta$ e $\cos^2\theta$ respectivamente, obtendo-se assim:

$$1 + cotg^2\theta = cossec^2\theta \qquad (30)$$

$$tg^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad (31)$$

De maneira análoga, associando o ângulo e as relações métricas com um triângulo retângulo, presentes nas equações (29), (30) e (31).

Muito presente também nas Substituições, onde deve-se usar as Equações:

$$sen(a+b) = sena\ cosb + senb\ cosa \qquad (32)$$

$$sen(a-b) = sena\ cosb - senb\ cosa \qquad (33)$$

$$\cos(a+b) = cosa\ cosb - sena\ senb \qquad (34)$$

$$\cos(a-b) = \cos a\ cosb + sena\ senb \qquad (35)$$

Assim como substituindo a equação (34) em (29), adequadamente:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - sen^2a = \left(1 - sen^2a\right) - sen^2a$$

Onde obtém-se:

$$sen^2a = \frac{1-\cos(2a)}{2} \qquad (36)$$

Ou, ainda:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a)$$

Que resulta-se em:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \qquad (37)$$

Exemplo 38: [Cálculo da área de um círculo] Calcule a área do círculo que está dentro da circunferência centrada na origem e de raio 1, cuja equação é descrita por $x^2 + y^2 = 1$.

Resolução: Neste caso, ao verificar o gráfico, conforme a Figura 70, observa-se que para "cobrir a circunferência" precisa-se de duas funções:

$$y = +\sqrt{1 - x^2} \qquad (38)$$

E:

$$y = -\sqrt{1 - x^2} \qquad (39)$$

Além disso, conforme visto graficamente na Figura 70, a circunferência compreende 4 quadrantes de mesma área. Então, para calcular a área, é preciso apenas calcular a área referente a 1 quadrante (Função dada em (32)). Após isso, deve-se multiplicá-la por 4.

Assim, conforme a seção 5.3, tem-se a área equivalente à de 1 Quadrante:

$$A_Q = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Neste caso, utiliza-se a técnica de integração - substituição trigonométrica. Fazendo o uso da Equação (29), cuja intenção é retirar a expressão de dentro da raiz, opta-se por fazer a substituição:

$$x = \operatorname{sen} u \qquad (40)$$

Derivando, portanto, a equação (34):

$$\frac{dx}{du} = cosu \quad (41)$$

Lembrando que é necessário fazer a substituição por completo. Então, para a substituição dos limites na integral, deve-se ter:

- Para $x = 0$, obtém-se, considerando que a variação do ângulo *u* está entre 0 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, por estar no 1º Quadrante. Logo, $u = 0rad$;
- Para $x = 1$, obtém-se sob as mesmas considerações acima, tendo como resultado $u = \frac{\pi}{2}rad$.

Assim, fazendo as devidas substituições:

$$A_Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - sen^2 u} \; (cosudu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du$$

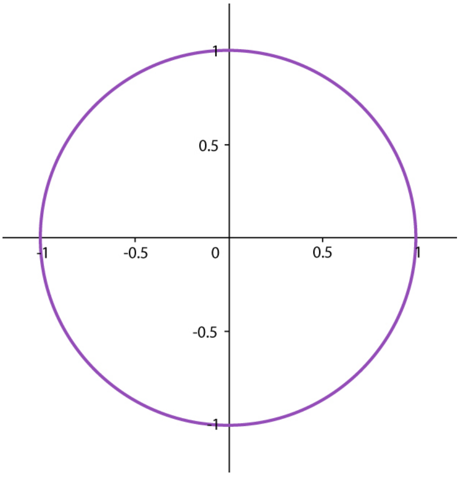
Levando em consideração a Equação (37), tem-se:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 + \cos(2u) \, du = \frac{1}{2}\left[u + \frac{sen(2u)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{sen0}{2}\right) - \left(0 + \frac{sen0}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}$$

Logo, a área do círculo é: 4. AQ = $\pi 1^2 = \pi$.

A penúltima igualdade foi colocada para fazer menção à área do círculo, que é πr^2, sendo com o raio 1.

Figura 72. Circunferência centrada na origem e raio 1, equação: $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

5.4.4 Integração por Partes

A regra de Integração Por Partes vem da Propriedade de Derivação do Produto de Funções, visto no Capítulo 4.

$$(f.g)' = f'.g + f.g' \qquad (42)$$

Assim, aplicando a integral na equação (42), obtém-se:

$$\int (f.g)'dx = \int (f'.g + f.g')dx$$

No qual se aplicam as propriedades básicas de integração, juntamente com o TFC:

$$\int f.g' \, dx = f.g - \int f'.gdx$$

Fazendo substituições auxiliares: $u = f(x)$ e $v = g(x)$, no qual $dudx = f'(x)$ e $dvdx = g'(x)$, admitindo que tais funções sejam deriváveis:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \qquad (43)$$

A equação (43) é conhecida como Regra de Integração Por Partes.

Observação 15: Considerando a Integral definida pela Regra de Integração Por Partes, todas as parcelas envolvidas no lado direito da equação (43) deverão atender ao TFC.

Exemplo 39: Calcule a integral $\int e^x cosx\,dx$.

Resolução: Note que, no integrando, há um produto de funções e que a ordem dos fatores não altera o produto. Por este motivo, em alguns casos, pode-se fazer as substituições com as funções auxiliares na ordem em que aparecem, mas existe um método chamado LIATE - Logarítmicas, Invertíveis, Algébricas, Trigonométricas e Exponenciais. Esse método leva em conta a escolha das funções nesta ordem em que aparecem, da esquerda para a direita.

Neste caso, utiliza-se $u = cosx$ e $dv = e^x dx$, do qual extrai-se: $\frac{du}{dx} = -sen\,x$ e $v = e^x$. Aplicando a Regra de Integração Por Partes:

$$\int e^x cosx\,dx = \cos x\,e^x - \int e^x(-sen\,x\,dx) = e^x cosx + \int e^x senxdx \qquad (44)$$

Onde se encontra uma outra integral, que será realizada pela Regra de Integração Por Partes:

$$\int e^x senxdx$$

Sendo $u = senx$ e $dv = e^x$, com $\frac{du}{dx} = cosx$ e $v = e^x$, aplica-se a Regra de Integração Por Partes:

$$\int e^x senxdx = e^x senx - \int e^x cosx\,dx \qquad (45)$$

Substituindo (45) em (44):

$$\int e^x cosx\,dx = e^x cosx + e^x senx - \int e^x cosx\,dx$$

Analisando como equação, isola-se a integral a ser calculada e obtém-se o resultado:

$$2\int e^x cosx\,dx = e^x(cosx + senx)$$

Assim:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x(\cos x + senx) + \ k$$

Onde k é uma constante real.

5.4.5 Integração por Frações Parciais

Esta técnica consiste em "quebrar" o integrando que vem na forma de quociente de duas funções $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$, ramificando-o em várias condições, a depender do grau do polinômio, que descreve $p(x)$ e $q(x)$.

De modo geral, tem-se:

I) quando $grau(p) < grau(q)$: decomposição em soma de frações;
II) quando $grau(p) \geq grau(q)$: Divisão de Polinômios.

Para descrever o método I, toma-se o grau de $p(x)$ como 1 e o grau de $q(x)$ de grau 2. O que acarretará em 3 casos, dependendo do discriminante Δ.

Em simplificação, o leitor terá que consultar [4] para verificar a totalidade dos casos, pois aqui faremos apenas com $\Delta > 0$ e $\Delta = 0$.

Método I

- $\Delta > 0$: o que diz que o polinômio $q(x)$ admite duas raízes reais e distintas.
  Fazendo o procedimento de MMC, consegue-se uma igualdade de frações, fazendo com que os numeradores se tornem uma igualdade de polinômio, o que nos direciona para um sistema de equações;
- $\Delta = 0$: o que diz que o polinômio $q(x)$ admite duas raízes reais e iguais.
  Fazendo o procedimento de MMC, com um acréscimo de potência, para que haja distinção entre as raízes de polo múltiplo;
- $\Delta < 0$: o que diz que o polinômio $q(x)$ admite duas raízes complexas.

Método II

Esse método consiste em fazer a divisão de polinômios e levar em consideração o Algoritmo da Divisão, mostrado abaixo:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} r(x) & s(x) \end{array}$$

Onde $p(x) = q(x).s(x) + r(x)$.

Exemplo 40: Calcule a integral $\int \frac{2x-3}{x^2-5x+6}dx$.

Resolução: No integrando, tem-se o Método I.

Calculando as raízes do polinômio $q(x) = x^2 - 5x + 6$ pelo método da Soma e Produto, obtém-se 2 e 3 (raízes reais e distintas), cuja decomposição é $(x-2)(x-3)$.

Assim:

$$\frac{2x-3}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x+(-3A-2B)}{x^2-5x+6}$$

Analisando a igualdade como um todo e fazendo a igualdade de polinômios no numerador, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -3A - 2B = -3 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = 3 \end{cases}$$

Substituindo os coeficientes na 1ª igualdade e retornando o cálculo da integral indefinida e suas propriedades básicas, fica:

$$\int \frac{2x-3}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{-1}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-3}dx = -ln|x-2| + 3ln|x-3| + lnk$$
$$= ln\left|\frac{k(x-3)^3}{(x-2)}\right|$$

Observação 16: Uma outra maneira de descobrir os coeficientes A e B é através do cálculo de limite:

$$C_{k-i} = \lim_{x\to p_i}(x-p_i)G(x)\,;\, i = 0,1,\dots,(k-1)$$

Logo:

$$A = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{2x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}(x-2)\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{2x-3}{x-3} = \frac{4-3}{2-3}$$
$$= -1$$
$$B = \lim_{x\to 3}(x-3)\frac{2x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3}(x-3)\frac{2x-3}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x-3}{x-2} = \frac{6-3}{1} = 3$$

Exemplo 41: Calcule a integral $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-2x+1}dx$.

Resolução: Neste caso, perceba que o integrando está na condição do Método I. Porém, ao fatorar o polinômio do denominador, que é $x^2-2x+1 = (x-1)^2$, temos raízes com multiplicidade. Procedendo da mesma maneira que no Exemplo 40, deve-se separar o integrando na soma de frações:

$$\frac{5x-1}{x^2-2x+1} = \frac{5x-1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax+(-A+B)}{x^2-2x+1}$$

Fazendo a igualdade de polinômio, obtém-se:

$$\begin{cases} A = 5 \\ -A+B = -1 \end{cases}$$

Onde tem-se que: $A = 5$ e $B = 4$. Retornando para a integral indefinida:

$$\int \frac{5x-1}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{5}{x-1}dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}dx = 5ln|x-1| + 4\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + k$$
$$= 5ln|x-1| - \frac{4}{(x-1)} + k$$

Observação 17: Um outro procedimento para calcular os coeficientes é usar um algoritmo para determinar os coeficientes com raízes múltiplas:

$$c_{k-i} = \frac{1}{i!}\lim_{x\to p_i}\frac{d^i}{dx^i}(x-p_i)^k G(x)$$

Com $i = 0,1,2,\ldots,(k-1)$.

Para condizer com a notação acima, renomearemos os coeficientes:

$$\frac{5x-1}{x^2-2x+1} = \frac{5x-1}{(x-1)^2} = \frac{C_1}{(x-1)} + \frac{C_2}{(x-1)^2}$$

Neste caso, o coeficiente é $k = 2$. Prosseguindo os cálculos:

$$C_{2-1} = C_1 = \frac{1}{1!}\lim_{x\to 1}\frac{d}{dx}(x-1)^2\frac{5x-1}{(x-1)^2}_{x=1} = \lim_{x\to 1}\frac{d}{dx}[5x-1] = \lim_{x\to 1}5 = 5$$

$$C_{2-0} = C_2 = \frac{1}{0!}\lim_{x\to 1}(x-1)^2\frac{5x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}5x-1 = 4$$

Exemplo 42: Calcule a integral indefinida $\int \frac{x^2+4x-7}{x-2}dx$.

Resolução: O integrando está conforme o Método II, pois o $grau(p) > grau(q)$, resultando na necessidade de realizar a divisão de polinômios:

$$\begin{array}{r|l} x^2+4x-7 & x-2 \\ \cline{2-2} -x^2+2x & x+6 \\ \hline 6x-7 & \\ -6x+12 & \\ \hline (5) & \end{array}$$

Tem-se que:

$$x^2 + 4x - 7 = (x - 2)(x + 6) + 5$$

Ou, de outra forma:

$$\frac{x^2 + 4x - 7}{(x - 2)} = (x + 6) + \frac{5}{(x - 2)}$$

Substituindo na Integral:

$$\int \frac{x^2 + 4x - 7}{x - 2} dx = \int \left[(x + 6) + \frac{5}{(x - 2)}\right] dx = \int (x + 6) dx + \int \frac{5}{(x - 2)} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 6x + 5ln|x - 2| + k$$

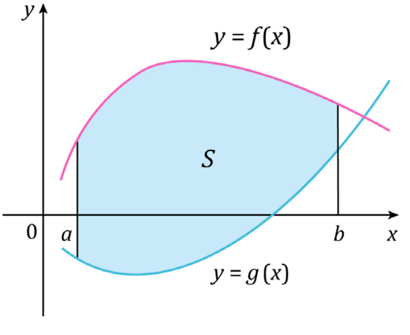
Observação 18: Todos os métodos vistos podem ser aplicados à Integral Definida, bastando aplicar o TFC.

5.5. Cálculo de Áreas

O cálculo de áreas é feito em termos do cálculo visto na seção 5.3, extraindo-se somente a área desejada. Para isto, serão colocados os passos para o desenvolvimento do cálculo de áreas, compreendido entre dois gráficos de funções:

1. Constrói-se os gráficos das funções envolvidas sobre o mesmo plano 2D, como na Figura 73:

Figura 73. Esquema gráfico envolvendo as funções f e g



Fonte: Stewart, 2013

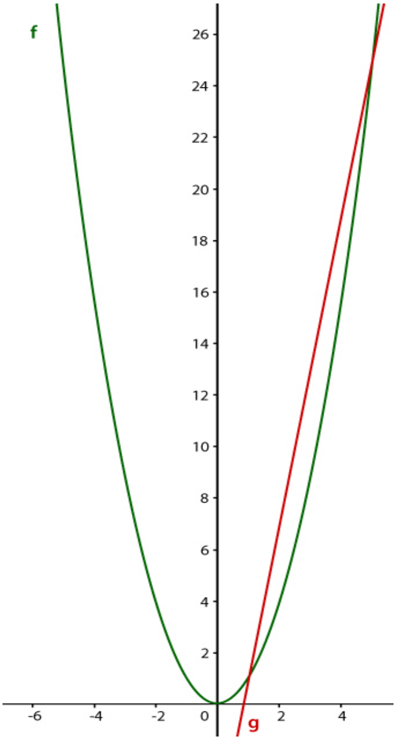
2. Determinam-se os pontos de interseção entre os gráficos. Para isto, iguale as funções, caso haja interseção entre elas, ou delimite as retas $x = a$ e $x = b$;
3. Monte a integral definida:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Exemplo 43: Calcule a área compreendida entre a parábola $f(x) = x^2$ e a reta $g(x) = 6x - 5$.

Resolução: Primeiramente, o esquema gráfico é muito importante, para saber como é o comportamento das funções envolvidas, se tem ou não interseção.

Figura 74. Esquema gráfico das funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 6x - 5$ no mesmo plano 2D



Fonte: App Suíte GeoGebra - Gráfica

Como pode ser observado na Figura 74, existem pontos de interseção. Para saber quais são eles, igualam-se as funções $f(x) = g(x)$, resultando na equação do 2º grau:

$$x^2 = 6x - 5$$

Ou, melhor ainda:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

Usando Soma e Produto de Raízes, tem-se as raízes 1 e 5. O último passo consiste em montar a integral para descobrir a área compreendida entre os dois gráficos:

$$A = \int_1^5 [g(x) - f(x)]dx = \int_1^5 (6x - 5 - x^2)dx = 6\frac{x^2}{2} - 5x - \frac{x^3}{3}\Big|_1^5$$

$$= \left(3.5^2 - 5.5 - \frac{5^3}{3}\right) - \left(3.1^2 - 5.1 - \frac{1^3}{3}\right) = 72 - 20 - \frac{124}{3} = 52 - \frac{124}{3}$$

$$= \frac{156 - 124}{3} = \frac{32}{3} \cong 10{,}67u.a$$

5.6. Cálculo de Integrais usando GeoGebra

Utilizando a ENTRADA do GeoGebra e colocando a palavra INTEGRAIS, irão aparecer as opções para o cálculo de integrais, como, por exemplo:

Quadro 28. Comandos no GeoGebra para o cálculo de Integrais Indefinidas e Definidas

Opções	Serve para
Soma de Riemann Inferior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>)	Determinar os retângulos (definindo a altura pela menor das imagens no extremo de cada subintervalo) e calcular a Soma de Riemann

Soma de Riemann Superior(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>, <Número de Retângulos>)	Determinar os retângulos (definindo a altura pela maior das imagens no extremo de cada subintervalo) e calcular a Soma de Riemann
Integral(<Função>)	Cálculo da integral sem adição de constantes
Integral(<Função>, <Variável>)	Possibilita o cálculo de integrais, identificando a variável desejada
Integral(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)	Cálculo de Integrais Definidas
Integral Entre(<Função>, <Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)	Cálculo de áreas entre funções

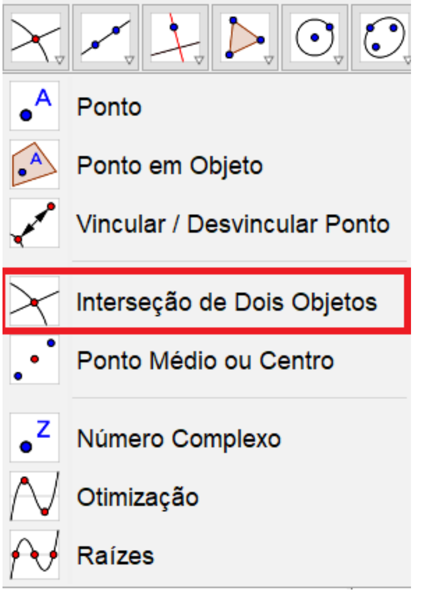
Fonte: Da autora

5.7. Cálculo de áreas usando GeoGebra

Para usar o software GeoGebra, é interessante colocar, na barra de ENTRADA, as funções, exibindo-as no Plano 2D. Após isso, use o comando na ENTRADA Integral Entre (<Função>, <Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>), onde basta substituir as funções e os pontos de interseção ou retas, que delimitam a área a ser calculada.

Para identificar os pontos de interseção, use o botão exibido na Figura 75, e selecione os gráficos exibidos na tela, onde suas coordenadas aparecerão na Janela de Álgebra.

Figura 75. Botão Interseção de Dois Objetos presentes na Barra de Botões do Software GeoGebra



Fonte: App Suíte GeoGebra – Gráfica

Assim, pode-se substituir as funções envolvidas e os pontos de interseção. Por fim, a área aparecerá na Janela de Álgebra.

Referências

ARCOSENO. *Universo Fórmulas*. Disponível em: https://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/arcoseno/.

CICLO Trigonométrico. Secretaria da Educação. *Dia a Dia Educação*. Disponível em: https://images.app.goo.gl/EvrSiuUJKuXhHVgT6.

FUNÇÃO Trigonométrica. *Sala de aula*. https://professordematematicaalessandro.blogspot.com/2020/03/funcao-trigonometrica.html.

GUIDORIZZI, H. L. *Cálculo*. Volume 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

NUNES, V. F. R. O que é o círculo trigonométrico? *matematica.pt*. Disponível em: https://www.matematica.pt/faq/circulo-trigonometrico.php. Acesso em: 03 fev. 2025.

OLIVEIRA, R. R. Função inversa. *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcao-inversa.htm.

OLIVEIRA, R. R. Funções trigonométricas. *Brasil Escola*. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/funcoes-trigonometricas-1.htm.

PEREIRA, E. L. F. *Álgebra Linear com o uso de Softwares Educacionais*. Manaus: Editora UEA, 2023.

ROCHA, F. Lançamento Oblíquo e o Futebol. *Profes*. Disponível em: https://profes.com.br/felipes.rocha/blog/lancamento-obliquo-e-o-futebol.

STEWART, J. *Cálculo*. Volume 1. 4. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

Sobre a autora

Elainne Ladislau Ferreira Pereira

Nascida em Manaus/AM. Mestra na área de Matemática Pura em Álgebra, com o título de dissertação Subgrupos Normais finitamente gerados em Grupos Limites, em 2006, pela Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Especialista em Ensino de Matemática, cujo trabalho de conclusão, realizado em 2004, é intitulado Analfabetismo Matemático nas Escolas Públicas de Manaus-AM. Licenciada em Matemática, em 2002. Atualmente, é pesquisadora na área de Educação Matemática e Matemática Aplicada pela Universidade do Estado do Amazonas (UEA), onde também é professora efetiva, lotada na Escola Superior de Tecnologia (EST), trabalhando com o ciclo básico de Engenharias (Civil, Mecânica, Controle e Automação, Naval, Produção, Elétrica, Eletrônica), Licenciaturas de Informática e Meteorologia. Possui publicações em diversos Congressos e Encontros relacionados à Educação Matemática, Matemática e Engenharia, atuando, também, em Projetos de Extensão e de Iniciação Científica. É autora das obras *Álgebra Linear com o uso de Softwares Educacionais* e *Álgebra Linear: análise de espaços vetoriais a cônicas e quádricas v.2.*, publicadas pela Editora UEA.

título Cálculo v. 1: Análise de gráfico de funções reais e suas aplicações com uso de software educacional

autora Elainne Ladislau Ferreira Pereira

tipografias Cambria Math
Crimson Text
Pt Serif
Poppins
Raleway
Tinos

número de páginas 149

Setembro de dois mil e vinte e cinco, dezessete anos após a publicação da obra *Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software*, de Selma Arenales e Artur Darezzo.

editora **UEA**

para conhecer mais da *editora***UEA** e de nossas publicações, acesse o qr code abaixo

ueaeditora

Você já se perguntou para que serve toda essa Matemática nos primeiros períodos do curso de Engenharia? Essa dúvida é comum e compreensível. No início, é difícil enxergar a conexão entre fórmulas, gráficos, derivadas e integrais com a prática da Engenharia. Mas, a verdade é que toda a base teórica do engenheiro começa aqui, na Matemática. Modelagem matemática, resolução de problemas, análise de gráficos, desenho técnico, entre outros, tudo isso depende de uma compreensão sólida dos conceitos matemáticos.

Neste livro, você será guiado por uma abordagem visual e aplicada, com ênfase na análise de gráficos de funções reais e suas aplicações práticas, especialmente com o apoio de software educacional.

A função — esse objeto central do cálculo diferencial e integral — é apresentada de forma dinâmica e contextualizada. Você aprenderá a usá-la para explorar cenários reais, entender comportamentos através dos limites, resolver problemas e ir além das formas retas, descobrindo como curvas e superfícies revelam um mundo de possibilidades.

Calcular áreas e volumes nunca foi tão intuitivo e instigante.

Mergulhe nessa jornada e compreenda como a Matemática pode ser uma poderosa aliada na sua formação como engenheiro — unindo teoria, prática e tecnologia.

Elainne Ladislau Ferreira Pereira

Professora Efetiva e membro da Comissão de Extensão

Universidade do Estado do Amazonas - UEA

editora UEA

UEA UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS

AMAZONAS GOVERNO DO ESTADO