



UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS  
CENTRO DE ESTUDOS SUPERIORES DE PARINTINS  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A CONTRIBUIÇÃO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA NA FORMAÇÃO  
DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

<b>Autor</b>	Ítalo Jone Xavier Martins
<b>Orientador</b>	Prof. Dr. Júlio César Marinho da Fonseca
<b>Banca Examinadora</b>	Prof <sup>a</sup> . Dra. Isabel do Socorro Lobato Beltrão Prof. Dr. Clodoaldo Pires Araújo
<b>Resumo</b>	<p>Este trabalho aborda a geometria hiperbólica como uma alternativa conceitual e pedagógica à geometria euclidiana tradicional, com ênfase em sua relevância para a formação de professores de matemática. A geometria hiperbólica, caracterizada por um espaço de curvatura negativa e pela negação do postulado das paralelas de Euclides, oferece uma nova perspectiva sobre os conceitos de reta, ângulo e distância. A pesquisa investiga as contribuições dessa geometria na formação docente, destacando seu potencial para desenvolver o pensamento crítico e o raciocínio lógico dos futuros professores. Modelos como o disco de Poincaré e o plano de Klein são apresentados como ferramentas didáticas eficazes para a visualização e o ensino dos conceitos hiperbólicos, especialmente quando integrados a recursos tecnológicos como o software Geogebra. Apesar dos desafios didáticos e conceituais relacionados à sua complexidade e à escassez de materiais acessíveis, a inclusão da geometria hiperbólica no currículo de licenciatura em matemática pode enriquecer a formação docente, promovendo uma abordagem mais flexível, criativa do ensino da matemática.</p> <p><b>Palavras-chave:</b> Geometria hiperbólica. Formação docente. Educação matemática. Ensino de geometria. Modelos não euclidianos.</p>
<b>Abstract</b>	<p>This paper addresses hyperbolic geometry as a conceptual and pedagogical alternative to traditional Euclidean geometry, with an emphasis on its relevance for the training of mathematics teachers. Hyperbolic geometry, characterized by a space of negative curvature and the negation of Euclid's postulate of parallel lines, offers a new perspective on the concepts of straight line, angle and distance. The research investigates the contributions of this geometry to teacher training, highlighting its potential to develop critical thinking and logical reasoning in future teachers. Models such as the Poincaré disk and the Klein plane are presented as effective teaching tools for the visualization and teaching of hyperbolic concepts, especially when integrated with technological resources such as Geogebra software. Despite the didactic and conceptual challenges related to its complexity and the scarcity of accessible materials, the inclusion of hyperbolic geometry in the mathematics undergraduate curriculum can enrich teacher training, promoting a more flexible and creative approach to teaching mathematics.</p> <p><b>Keywords:</b> Hyperbolic geometry. Teacher training. Mathematics education. Geometry teaching. Non-Euclidean models.</p>

## A CONTRIBUIÇÃO DA GEOMETRIA HIPERBÓLICA NA FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

### Introdução

A geometria hiperbólica é uma das formas de geometria não euclidiana, onde os postulados clássicos de Euclides são modificados, principalmente o postulado das paralelas. Algumas características que diferenciam a geometria hiperbólica em relação à geometria euclidiana estão no comportamento das linhas retas, dos ângulos e das distâncias, tudo isso em um espaço curvado negativamente. Desde o início da nossa formação na educação básica ficamos limitados a geometria de Euclides, deixando passar despercebido as demais geometrias, além disso vivemos num espaço tridimensional, onde conceitos da geometria euclidiana torna-se limitada, sendo assim a geometria hiperbólica ultrapassa esses limites e corresponde ao plano tridimensional, satisfazendo situações como calcular a geodésica entre duas cidades.

O presente trabalho busca trazer quão importante e necessário são as compreensões da geometria hiperbólica e como ela pode contribuir para a formação do professor de matemática, desenvolvendo um pensamento crítico e mostrando que a matemática não é um campo fechado que podemos explorar as diversidades da sua ampla dimensão. Dessa forma torna-se importante investigar quais possíveis contribuições da geometria hiperbólica na formação do professor de matemática?

Busco responder algumas questões que me guiaram nesse trabalho. Tornando-se viável pesquisar se é possível a geometria hiperbólica como ferramenta pedagógica na formação de professores, analisado os caminhos traçados pela geometria hiperbólica através de publicações de artigos, teses etc.

Compreender os desafios para incluir tal conteúdo na grade de formação dos professores, tais desafios dessa inclusão auxiliara no nosso objetivo, isso porque A geometria hiperbólica é conceitualmente complexa e exige uma compreensão sólida de conceitos matemáticos avançados. Muitos professores em formação podem se sentir intimidados pela complexidade do tema. Essa complexidade pode representar um obstáculo, tanto na compreensão quanto na capacidade de ensinar esses conceitos de forma acessível para os acadêmicos.

Assim como estudar as potencialidades que a geometria hiperbólica é capaz de nos proporcionar para futuros professores, entender a geometria hiperbólica oferece uma

oportunidade para questionar e refletir sobre os pressupostos que regem a geometria tradicional, tornando-se um ponto de partida para discussões mais profundas sobre a natureza da matemática.

A geometria hiperbólica pode ajudar a ampliar sua visão sobre o conceito de espaço, ao compreender a curvatura negativa e a diversidade de espaços geométricos possíveis, os educadores podem encorajar seus educandos a pensarem de forma mais criativa e flexível, ampliando as possibilidades de ensino para além da geometria euclidiana.

Este trabalho foi dividido em quatro partes, a primeira trata da geometria hiperbólica de forma conceitual. A segunda parte como ferramenta pedagógica. A terceira parte trata dos desafios da inclusão da geometria hiperbólica na da formação de professores de matemática. A quarta parte trata do potencial da geometria hiperbólica na formação de professores de matemática.

### **A Geometria Hiperbólica: Uma Introdução Conceitual.**

Segundo Barbosa (IMPA, 2007), na busca por uma prova do quinto postulado de Euclides, os esforços feitos ao longo de tantos séculos trouxeram frutos e um entendimento profundo da geometria euclidiana. A tentativa de provar o quinto postulado através dos outros transformou-se, ao final, no estudo da geometria absoluta de Bolyai.

A geometria hiperbólica é uma forma de geometria não euclidiana que surge ao modificar o postulado das paralelas de Euclides. Enquanto, na geometria euclidiana, dado um ponto e uma reta, existe uma reta paralela a essa reta que passa pelo ponto, na geometria hiperbólica existem infinitas linhas paralelas, todas diferentes, e todas se comportam de maneira peculiar em um espaço curvado negativamente.

Essa geometria pode ser representada por diferentes modelos, sendo os mais conhecidos o modelo do círculo de Poincaré e o modelo do plano de Klein.

De acordo com Agustini (1971), a existência de um modelo para o sistema axiomático da geometria euclidiana e a apresentação de modelos para as chamadas geometria hiperbólica e geometria elíptica plana, que são geometrias nas quais não se aplica o quinto postulado de Euclides, e, portanto, não se aplica qualquer um de seus equivalentes, também é fundamental.

Em ambos os casos, as figuras geométricas se comportam de maneira diferente do que estamos acostumados: os triângulos, por exemplo, têm a soma dos ângulos internos menor que  $180^\circ$ , e as linhas retas são arcos de círculos. Esses conceitos rompem com as noções euclidianas

de "retas" e "planos", oferecendo uma nova maneira de pensar o espaço. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre menor que  $180^\circ$ . Se existisse um triângulo cuja soma dos ângulos internos fosse igual a  $180^\circ$ , teríamos uma equivalência ao postulado das paralelas, o que contradiz o postulado hiperbólico das paralelas. Portanto, a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer na geometria hiperbólica é estritamente menor que  $180^\circ$  (Souza, 2022, p. 16).

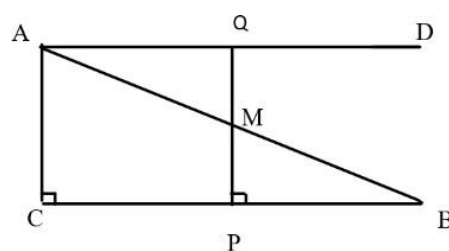
Para futuros professores, entender a geometria hiperbólica oferece uma oportunidade para questionar e refletir sobre os pressupostos que regem a geometria tradicional, tornando-se um ponto de partida para discussões mais profundas sobre a natureza da matemática.

A seguir, apresentarei algumas demonstrações e resultados fundamentais da geometria hiperbólica, com ênfase nas principais propriedades dessa geometria.

Uma das propriedades mais notáveis da geometria hiperbólica é que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre é menor que  $180^\circ$ . Isso é um reflexo da curvatura negativa do espaço.

**Prova.** Seja  $ABC$  um triângulo retângulo com ângulo reto no vértice  $C$ . Sabemos com base nos quatro primeiros postulados, que a soma de quaisquer dois ângulos de um triângulo é sempre menor que dois ângulos retos. Assim, os outros dois ângulos do triângulo dado são agudos.

Figura 1: Soma dos ângulos de um triângulo.



Fonte: O autor

Trace o segmento  $AD$  de sorte que  $AD\hat{A}B = ABC$ . Seja  $M$  o ponto médio de  $AB$ . Baixe perpendicular  $MP$  ao lado  $BC$ . Na semi-reta  $AD$ , marque o ponto  $Q$  tal que  $AQ = PB$ . Temos então  $AQM = BPM$ . Consequentemente,  $MQA$  é um ângulo reto e  $P, M$  e  $Q$  são colineares. Portanto  $ACPQ$  é quadrilátero de Lambert com ângulo agudo no vértice  $A$ . Logo a soma dos dois ângulos agudos do triângulo retângulo  $ABC$ , que é exatamente igual ao ângulo  $C\hat{A}D$ , é menor do que um ângulo reto, daí o resultado. (Barbosa, 2007, p. 68)

## 2. Teorema de Pitágoras na geometria hiperbólica

O teorema de Pitágoras, na geometria euclidiana, relaciona os catetos e a hipotenusa de um triângulo retângulo. Na geometria hiperbólica, essa relação sofre uma modificação devido à curvatura negativa do espaço.

**Teorema:** Se  $ABC$  é um triângulo retângulo no vértice  $C$  e de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $c$  oposto a  $C$ , então

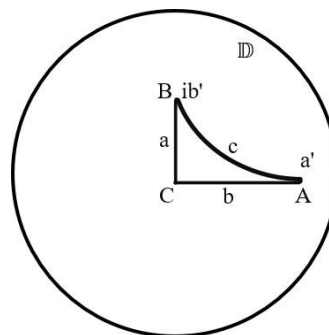
$$\cosh(2c) = \cosh(2a) \cdot \cosh(2b)$$

**Corolário** Se  $ABC$  é um triângulo retângulo em  $C$ , e de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , com  $c$  oposto a  $C$ , então a relação

$$\cosh(2c) = \cosh(2a) \cdot \cosh(2b)$$

tende ao caso Euclidiano, ou seja,  $a^2 + b^2 = c^2$ , quando consideramos  $a$ ,  $b$  e  $c$  muito pequenos. Podemos chegar ao resultado de:  $c^2 \approx a^2 + b^2$ , (Albon, 2021, p. 54)

Figura 2: Teorema de Pitágoras



Fonte: O autor

## 3. Paralelismo na Geometria Hiperbólica

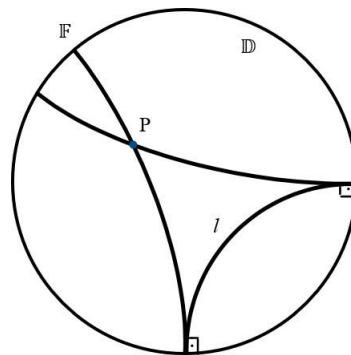
Na geometria hiperbólica, o conceito de paralelismo é radicalmente diferente da geometria euclidiana. O postulado das paralelas de Euclides, que afirma que pôr um ponto fora de uma reta passa exatamente uma reta paralela a ela, é substituído pela seguinte afirmação: por um ponto fora de uma reta, existem infinitas retas paralelas a ela.

**Definição.** Duas Linhas são paralelas se não se intersectam.

Demonstração: Considere uma reta  $l$  e um ponto  $P$  fora dela no plano hiperbólico. No modelo de Poincaré, as linhas paralelas são representadas por arcos de círculos que se interceptam no limite do disco (o "infinito" da geometria hiperbólica). A ideia é que, ao se aproximar do limite do círculo de Poincaré, as linhas paralelas podem "se curvar" de maneira a nunca se encontrar, mas todas permanecem "paralelas" à reta  $l$ . (Albon, 2021, p. 38)

Matematicamente, essas retas nunca se cruzam e podem se aproximar infinitamente do ponto de tangência, sem nunca se encontrarem. Assim, o conceito de paralelismo é mais flexível e mais rico, refletindo a natureza não euclidiana do espaço.

Figura 3: Retas Paralelas.



Fonte: O autor

#### 4. Modelo do Círculo de Poincaré

Uma maneira de visualizar a geometria hiperbólica é através do modelo do círculo de Poincaré, onde o plano hiperbólico é representado pelo interior de um círculo. Neste modelo, as linhas retas são arcos de círculos que se interceptam no limite do disco.

Demonstração da Distância Hiperbólica: Em termos de distância, a fórmula para a distância entre dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  no modelo do círculo de Poincaré é dada por:

$$d = (Z_1, Z_2) = \tanh^{-1} \left( \left| \frac{Z_2 - \bar{Z}_1}{1 - \bar{Z}_1 Z_2} \right| \right)$$

Esta fórmula leva em consideração a curvatura do plano hiperbólico e nos dá uma noção precisa de como medir distâncias em um espaço curvado. (Albon, 2021, p. 41)

### **A Geometria Hiperbólica como Ferramenta Pedagógica.**

O ensino da geometria hiperbólica pode ser desafiador, especialmente para professores em formação, isso porque a geometria mais estudada é a geometria de Euclides. Pôs analisando o PPC do curso pude perceber que está com fins formativo em seus objetivos específicos para a educação básica, porém, no objetivo geral ele nos “proporcionar uma formação sólida matemática e pedagógica, para que os estudantes da Licenciatura em Matemática construam e desenvolvam conceitos, formas de pensar e aptidões didáticas que os habilitem para atuar de forma crítica e reflexiva,” (UEA, 2021, p. 34).

No entanto, a introdução dos conceitos da geometria hiperbólica pode proporcionar uma série de benefícios. De acordo com (Fiorentini: Lorenzato, 2012), os autores analisam como a prática pedagógica na área da educação matemática se aplica no seu contexto, com foco na formação de professores e no desenvolvimento de uma prática reflexiva e crítica sobre o ensino da matemática.

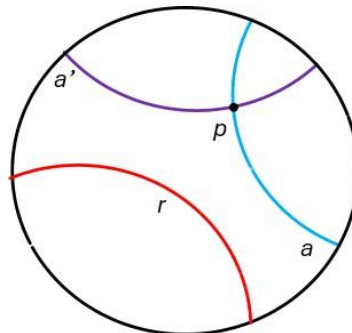
A geometria hiperbólica exige dos alunos e professores um pensamento mais abstrato e crítico. Ao abordar a geometria não euclidiana, o futuro professor é desafiado a sair da zona de conforto das ideias de "plano" e "linha reta" e a explorar conceitos que, embora desconcertantes à primeira vista, ampliam as possibilidades de pensar sobre o espaço. Essa experiência pode ser um poderoso exercício de desenvolvimento cognitivo, estimulando o raciocínio lógico e a capacidade de questionar suposições. Segundo (Sérgio Nobre, 2009), ele apresenta uma proposta pedagógica que visa integrar a história do desenvolvimento das ideias matemáticas ao ensino, estimulando uma compreensão mais profunda e crítica sobre a matemática e explicando como o pensamento matemático evoluiu a partir dos postulados de Euclides até as descobertas que deram origem a novas formas de compreender o espaço geométrico.

A geometria hiperbólica tem o potencial de oferecer aos professores uma chance de inovar no ensino da matemática. Ao incluir tópicos não convencionais, os professores podem mostrar aos seus futuros alunos que a matemática não é um campo fechado e estático, mas sim um campo em constante evolução, que envolve exploração e criatividade. A utilização da geometria hiperbólica como ferramenta pedagógica permite o desenvolvimento de

competências como o raciocínio lógico, a argumentação matemática e a capacidade de abstração. Ao apresentar aos estudantes diferentes sistemas geométricos, promove-se o pensamento crítico e a flexibilidade cognitiva. Modelos como o disco de Poincaré ou o semiplano de Klein, pode-se introduzido pelo uso de tecnologias, como softwares de geometria dinâmica (ex.: Geogebra), para explorar visualmente as propriedades da geometria hiperbólica são recursos visuais eficazes para o ensino, permitindo a exploração intuitiva das propriedades dessa geometria.

O Disco de Poincaré um modelo de estudo da geometria hiperbólica: Este modelo é uma representação visual da geometria hiperbólica, que foi desenvolvida pelo matemático francês Henri Poincaré no final do século XIX. O desenvolvimento deste modelo se deu com o intuito de explorar esta geometria e outras geometrias não euclidiana. Estende-se ao fato de podermos trabalhar os conceitos da geometria hiperbólica em um disco ou em um semi disco. Na qual torna-se possível explorar e visualizar a contradição do quinto postulado de Euclides.

Figura 4: O disco de Poincaré



Fonte: O autor

$$a \parallel r : a' \parallel r : p \in a : p \in a' : a \neq a'$$

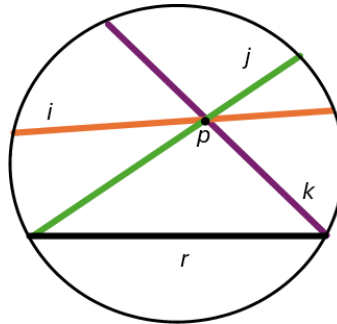
A figura 4 representa a seguinte definição: “Dada uma reta  $r$  e um ponto  $p$  fora dela existe infinitas reta que passam por  $p$  e são paralelas à reta  $r$ ”.

O disco de Poincaré trabalha a seguinte questão, digamos que você se encontra no centro do disco e se move numa única direção para chegar até a borda, à medida que está se deslocando a cada passo que dar em direção da borda, mais distante ela fica, é como se a cada passo você diminui-se e em vista disso a distância até a borda aumentasse infinitamente.

O modelo de Klein ou modelo do disco projetivo é um modelo da geometria hiperbólica. Ele representa o plano hiperbólico dentro de um disco euclidiano (geralmente o disco unitário),

mas com uma particularidade. No plano de Klein, as geodésicas são representadas por cordas euclidianas, ou seja, segmentos de reta comuns dentro do disco que ligam dois pontos na borda do disco.

Figura 5: O modelo de Klein



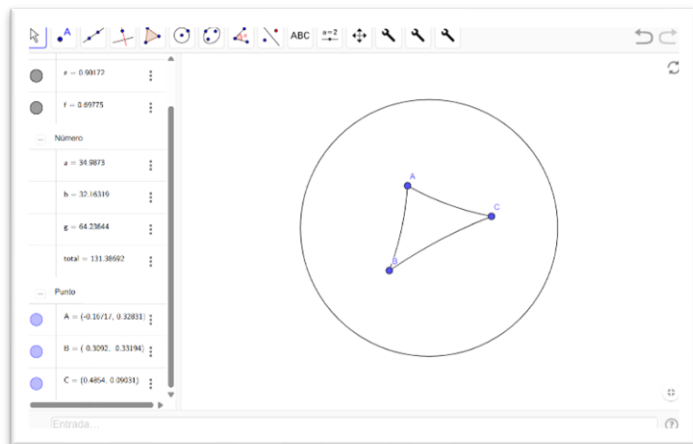
Fonte: O autor

$$i // r : j // r : k // r : p \in i : p \in j : p \in k : i \neq j \neq k$$

O modelo de Klein: Normalmente usa um disco unitário, ou seja, o seu raio  $r = 1$ , e as suas geodésicas, são linhas/segmento de retas contidas dentro do disco. Em relação aos ângulos, não é como o senso comum nos diz, esses ângulos não preservam as características da geometria euclidiana apesar de visualmente serem parecidos, assim bem como as medidas e as distancias, são definidas de forma que os axiomas da geometria hiperbólica sejam satisfeitos (como o postulado das paralelas de Lobachevsky).

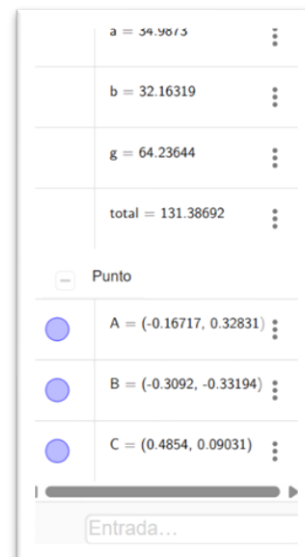
O software geogebra também é um recurso tecnológico muito satisfatório para o estudo da geometria hiperbólica nele podemos visualizar da mesma forma que nos outros dois modelos. Isso porque dentro do software podemos recriar o disco de Poincaré, e com a IA do computador ou de celular, já que o geogebra pode ser instalado em ambos os aparelhos, podemos ver os valores numéricos tanto das coordenadas quanto dos ângulos, assim bem como realizar as somas dos ângulos. Na qual fica visualmente esclarecido mais uma definição da geometria hiperbólica, à soma dos ângulos internos de triângulo hiperbólico, que será sempre menor que  $180^\circ$ .

Figura 6: Disco de Poincaré no geogebra



Fonte: O autor

Figura 7: A soma dos ângulos de um triângulo hiperbólico no geogebra



Fonte: O autor

### **Desafios na Inclusão da Geometria Hiperbólica na Formação de Professores de Matemática.**

Apesar de seu enorme potencial, a inclusão da geometria hiperbólica na formação de professores apresenta alguns desafios e limitações, devido as complexidades de seus conceitos e a limitação de matérias de estudos. A geometria hiperbólica é conceitualmente complexa e exige uma compreensão sólida de conceitos matemáticos avançados. Muitos professores em formação podem se sentir intimidados pela dificuldade do tema, especialmente se a base em geometria clássica não for bem consolidada. Essa complexidade pode representar um obstáculo, tanto na compreensão quanto na capacidade de ensinar esses conceitos de forma acessível para os acadêmicos.

Embora a geometria hiperbólica seja um tema fascinante, ela não é amplamente abordada em livros didáticos convencionais para o ensino médio ou na formação de professores de matemática. A falta de recursos didáticos são exemplos acessíveis e dificulta a inclusão desse conteúdo nas salas de aula, o que pode limitar a familiaridade dos futuros professores com o tema. Além disso, a maioria dos materiais existentes requer o uso de software específico ou recursos visuais que nem sempre estão disponíveis, e se estão disponíveis estão como recursos limitados.

## Potencialidades da Geometria Hiperbólica para a Formação de Professores de Matemática.

A geometria hiperbólica pode ajudar os futuros professores a ampliarem sua visão sobre o conceito de espaço. Ao compreender a curvatura negativa e a diversidade de espaços geométricos possíveis, os educadores podem encorajar seus educandos a pensarem de forma mais criativa e flexível, ampliando as possibilidades de ensino para além da geometria euclidiana. Este tipo de visão é fundamental, especialmente nas áreas de física, arquitetura e outras disciplinas que lidam com a representação do espaço. Isso permite uma abordagem interdisciplinar do conhecimento, que pode ser extremamente enriquecedora para a formação de professores, mostrando a conexão entre a matemática e outros campos do saber.

Temos em disposição para a estudo a biblioteca universitária e o laboratório de informática dois fatores de suma importância para um estudo proveitoso, que são dois pontos de extremo potencial para a formação acadêmica. Sendo assim fez-se necessário a utilização do questionário como um instrumento de coleta de dados a respeito desses locais. “Constituído por uma série ordenadas de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador. Em geral, o pesquisador envia o questionário ao informante.” (Marconi, Lakatos, 2017, p.188)

Desse modo, o questionário foi enviado pelo aplicativo de conversa “whatsapp”, visto que, era um meio mais ágil de comunicação. Foram executados três questionários: a um professor do laboratório de informática. Onde foram abordados os seguintes fatores:

- A disposição do laboratório para os acadêmicos estudarem.
- Se os computadores possuem o programa geogebra, a sua versão e se possuem as ferramentas de geometria hiperbólica. E.
- A necessidade de mais ações para o ensino dos softwares.

Quadro 1- O laboratório de Informática.

	<b>Todos os acadêmicos têm acesso ao laboratório para fins de estudo?</b>
<b>Respondente</b>	O respondente confirma que todos os acadêmicos têm acesso ao laboratório para fins de estudo.

	Há horários específicos durante a semana, sugerindo uma gestão organizada do espaço, possibilitando o uso igualitário.
	<b>Os computadores possuem o programa geogebra instalado? Qual versão?</b>
<b>Respondente</b>	Todos os computadores estão equipados com o software Geogebra, na versão 5.0.
	<b>O geogebra instalado possui as ferramentas de geometria hiperbólica?</b>
<b>Respondente</b>	O Geogebra instalado possui ferramentas de geometria hiperbólica, indicando que o laboratório está tecnicamente preparado para suportar conteúdos avançados em matemática.
	<b>Existido os recursos para o estudo, você acredita que necessita de mais ações para ensino dos softwares? Por quê?</b>
<b>Respondente</b>	Apesar da disponibilidade dos recursos, o respondente acredita que são necessárias mais ações voltadas ao ensino dos softwares. Argumenta que o uso dos programas pelos professores potencializaria a compreensão visual dos temas, especialmente geometria e álgebra.

A análise obtida do questionário, mostrou do laboratório seu grande potencial para o estudo da geometria hiperbólica. De acordo com Bicalho, Gazire (2006) o laboratório de informática deve ser compreendido como um espaço que oferece recursos e serviços que auxiliam tanto no desenvolvimento das aulas quanto na realização de atividades, funcionando como um instrumento de apoio pedagógico para professores e alunos. Está certo de que está bem-preparado com equipamentos atualizados e softwares relevantes instalados, como o Geogebra versão 5.0 com suporte à geometria hiperbólica e é claro com acesso garantido aos acadêmicos.

No entanto, há uma lacuna na integração pedagógica desses recursos: segundo o professor respondente, os docentes poderiam utilizar mais ativamente os softwares, explorando suas funcionalidades para melhorar a compreensão visual dos conteúdos matemáticos. Essa percepção sugere a necessidade de formações, oficinas ou estratégias institucionais para promover o uso pedagógico efetivo das tecnologias disponíveis.

Do segundo questionário está ligado diretamente com o acervo de livros de matemática, na qual foi regido sobre os seguintes aspectos.

- A seleção dos livros de matemática.
- Da solicitação de livros por parte dos discentes. E.
- Dos exemplares de livros de geometria.

Quadro 2- Sobre a Biblioteca.

	<b>Quem é o responsável por selecionar os livros do acervo de matemática?</b>
<b>Respondente</b>	Os professores das disciplinas são os responsáveis por solicitar livros. O processo é centralizado e hierárquico: o pedido passa pela coordenação do curso, direção da unidade e, por fim, pela Pró-Reitoria de Administração.
	<b>Nós como acadêmicos do curso de matemática podemos fazer solicitações de livros que não há no acervo?</b>
<b>Respondente</b>	Acadêmicos não têm autonomia para solicitar livros, mesmo que identifiquem lacunas no acervo.
	<b>No acervo de livros de matemática há exemplares de geometria?</b>
<b>Respondente</b>	O acervo possui livros de geometria, indicando presença de conteúdos fundamentais da área.
	<b>Quantos desses livros de geometria referisse a geometria hiperbólica?</b>
<b>Respondente</b>	Não há livros sobre geometria hiperbólica.

A partir da análise dos dados feita de maneiras qualitativa, pode-se identificar três pontos sobre o acervo de livros de matemática.

- O processo de aquisição de livros está institucionalizado e segue uma cadeia formal, o que garante controle e organização. O acervo já contempla livros de geometria, o que indica uma boa base de conteúdos matemáticos.
- A ausência de livros sobre geometria hiperbólica revela uma lacuna importante no acervo que causa uma limitação na abordagem de novos conteúdos. E com o fato de os acadêmicos não poderem solicitar livros diretamente, constitui uma restrição na utilização do acervo.
- Criar um mecanismo de escuta e sugestões de livros por parte dos acadêmicos, mesmo que os pedidos sejam mediados pela coordenação e realizar uma avaliação periódica do acervo, com a participação de professores e discentes, para

mapear as lacunas e definir prioridades de aquisição. Podendo assim atualizar o acervo com obras específicas de geometria hiperbólica e outros conteúdos de áreas menos representada.

O resultado dos questionários, pode evidenciar que: O curso de Matemática conta com boas condições estruturais, especialmente em relação ao laboratório de informática, que está bem equipado. No entanto, há desafios na articulação pedagógica desses recursos e uma necessidade de maior inclusão dos estudantes nos processos de melhoria. O acervo bibliográfico mostra-se funcional, mas carece de atualização e diversificação, principalmente para suportar estudos mais aprofundados.

O terceiro questionário foi aplicado à quatorze acadêmicos do curso de matemática, sendo 7 estudantes do 7º e 7 do 8º período. Os dados foram divididos em dois quadros.

Quadro 3- Dos acadêmicos do 7º período de matemática.

	<b>Você conhece as geometrias não euclidianas?</b>
<b>Respondente 1</b>	Sim
<b>Respondente 2</b>	Sim
<b>Respondente 3</b>	Não
<b>Respondente 4</b>	Não
	<b>Em que momento do curso você conheceu? E como foi esse contato?</b>
<b>Respondente 1</b>	Primeiro contato na X semana de Matemática do CESP, logo depois na disciplina de variáveis complexas no 7º período, no estudo de análise de funções complexas.
<b>Respondente 2</b>	Teve contato na disciplina de história da matemática no 5º período
<b>Respondente 3</b>	Não teve nenhum contato
<b>Respondente 4</b>	Não teve nenhum contato

Dos 7 estudantes consultados do 7º período, apenas 2 afirmaram conhecer as geometrias não euclidianas, e relataram contato em contextos extracurriculares (Semana de Matemática) e em disciplinas específicas (Variáveis Complexas e História da Matemática), outros 2 estudantes

declararam não conhecer o tema e relataram nenhum contato ao longo do curso. Dentre os participantes 3 não responderam a nenhuma das duas perguntas, o que representa uma lacuna de participação de quase 43%.

A maioria dos estudantes não teve ou não relatou contato significativo com as geometrias não euclidianas durante o curso. Apenas uma minoria teve contato, e esse ocorreu de forma pontual e não sistemática (eventos e disciplinas isoladas). Isso pode indicar uma necessidade de maior integração do tema na grade curricular ou em atividades complementares.

Quadro 4- Dos acadêmicos do 8º período de matemática.

	<b>Você conhece as geometrias não euclidianas?</b>
<b>Respondente 1</b>	Sim
<b>Respondente 2</b>	Sim
<b>Respondente 3</b>	Sim
<b>Respondente 4</b>	Sim
<b>Respondente 5</b>	Sim
	<b>Em que momento do curso você conheceu? E como foi esse contato?</b>
<b>Respondente 1</b>	Sim na disciplina de tópicos matemáticos, palestra do colóquio de matemática
<b>Respondente 2</b>	No Sexto período
<b>Respondente 3</b>	No quinto período na disciplina de história da matemática e no sétimo período na disciplina de variáveis complexas.
<b>Respondente 4</b>	Tive contato, mas não tenho certeza em que momento do curso, pois foi confuso no início.
<b>Respondente 5</b>	Em palestras e com professores que comentavam sobre o assunto de forma introdutória.

Dos 7 estudantes do 8º período 5 afirmaram conhecer as geometrias não euclidianas. No entanto, o contato com o tema se deu em momentos variados do curso algumas das respostas afirmam contato em disciplinas do curso como: História da Matemática, Variáveis Complexas

e Tópicos Matemáticos, e outros em atividades extracurriculares como: palestras, colóquio e até em comentários de professores. A maioria dos relatos indica que o contato com o tema não foi contínuo nem aprofundado, dentre os participantes 2 não responderam a nenhuma das duas perguntas, o que representa uma lacuna de participação de quase cerca de 29%

Embora a maioria dos estudantes tenha tido algum tipo de contato com o tema, ele ocorre de forma não sistemática e muitas vezes fora do núcleo curricular formal. Isso indica uma presença limitada das geometrias não euclidianas na formação dos alunos, sugerindo a necessidade de maior integração e aprofundamento desse conteúdo ao longo do curso.

A análise dos dados obtidos junto aos quatorze estudantes revelou que sete deles afirmaram conhecer as geometrias não euclidianas, enquanto cinco não responderam às questões. Os relatos indicam que o contato com o tema ocorreu de maneira diversa. Entre os momentos citados estão disciplinas como *História da Matemática*, *Variáveis Complexas* e *Tópicos Matemáticos*, bem como atividades extracurriculares, como palestras, colóquios e a X semana de Matemática. Um dos participantes mencionou ter tido contato com o tema, mas de forma confusa e sem lembrar o momento exato. No fim apenas dois não conhecem e por consequência não tiveram contato com as geometrias não euclidianas.

Essas informações sugerem que, embora o conteúdo esteja presente ao longo do curso, ele é abordado de forma não sistemática, muitas vezes em contextos paralelos ao currículo formal. Tal cenário indica a necessidade de maior integração das geometrias não euclidianas na formação dos licenciandos, proporcionando uma abordagem mais aprofundada e contínua do tema.

### **Considerações Finais**

A análise realizada ao longo deste trabalho evidenciou que a geometria hiperbólica constitui uma importante ferramenta pedagógica na formação de professores de matemática, sobretudo por seu potencial em promover uma compreensão mais ampla e crítica dos fundamentos da geometria. Ao desafiar os axiomas da geometria euclidiana, particularmente o postulado das paralelas, a geometria hiperbólica estimula a reflexão sobre a natureza axiomática do conhecimento matemático e fomenta o desenvolvimento de habilidades como o raciocínio abstrato, a argumentação lógica e a flexibilidade cognitiva.

A incorporação da geometria hiperbólica nos cursos de licenciatura em matemática, embora desafiadora devido à sua complexidade conceitual e à escassez de recursos didáticos específicos, apresenta-se como uma estratégia relevante para a ampliação do repertório epistemológico e didático dos futuros docentes. O domínio dessa abordagem geométrica contribui não apenas para a formação de professores mais preparados para lidar com a diversidade de conteúdos matemáticos, mas também para a construção de uma prática pedagógica mais crítica, investigativa e interdisciplinar.

Modelos como o disco de Poincaré e o plano de Klein, aliados ao uso de tecnologias educacionais, como software Geogebra, demonstram-se eficazes para a visualização e compreensão das propriedades e relações específicas da geometria hiperbólica. Tais recursos favorecem a superação das barreiras conceituais e metodológicas, viabilizando o ensino desse conteúdo de maneira mais acessível e significativa.

Dessa forma, conclui-se que a geometria hiperbólica, ao ser abordada de forma contextualizada e metodologicamente adequada, pode enriquecer substancialmente a formação inicial de professores de matemática, oferecendo subsídios teóricos e práticos para a promoção de uma educação matemática mais crítica, reflexiva e alinhada aos desafios contemporâneos do ensino.

## Referências

AGUSTINI, Edson. **Introdução à geometria hiperbólica plana**, Uberlândia: FARMAT UFU, 2022.

ALBON, Alfred James Dias. **A Geometria do Disco de Poincaré**. 2021. Licenciatura em Matemática-Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2021

BARBOSA, João Lucas, M. **Geometria Hiperbólica**, Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

BICALHO, A. J.; GAZIRE, E. S. O laboratório de informática como espaço de aprendizagem. *APRENDER - Caderno de Filosofia e Psicologia da Educação*, v. 6, p. 179-188, 2006. Disponível em: <https://periodicos2.uesb.br/index.php/aprender/article/view/3203>.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Ed. 2, traduzido por: Luciana de Oliveira Rocha - Porto Alegre: Artmed, 2007.

FIGUEIREDO, N. M. A. **Método e metodologias na pesquisa científica**. 3. ed. São Caetano do Sul, SP: Yendis Editora, 2008.

FIorentini, D.; Lorenzato, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** In Dario Fiorentini, Sérgio Lorenzato. rev.- Campinas: 3.ed. São Paulo SP: Autores Associados,2012.

Marconi, Maria de Andrade; Lakatos. Eva Maria. **Fundamentos de metodologia científica.** 8. Ed. São Paulo: Atlas, 2017.

MATEMATIZOU. Disco de Poincaré e geometria hiperbólica. 18 fev. 2024. Disponível em: <https://matematizou.gradmat.ufabc.edu.br/2024/02/18/disco-de-poincare-e-geometria-hiperbolica/>. Acesso em: 14 de maio de 2025.

NOBRE, Sérgio Roberto. **Introdução histórica às geometrias não euclidianas: uma proposta pedagógica.** Belém: SBHMT, 2009.

SOUZA, Lucas Ricardo. **Geometria não Euclidiana na formação de professores.** 2022. Dissertação (Mestrado em Ciências-Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2021).

SOUNDMANBRAD. Hyperbolic Geometry in the Poincaré Disk. GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/R5e9AggU>. Acesso em: 19 de maio de 2025

UEA, Universidade do Estado do Amazonas. 2021. Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática. Parintins-AM.

### **Agradecimentos**

Agradeço a Deus por te me concedido concluir esta etapa de minha jornada, pois sem ele nada seria possível, a nossa senhora do Carmo minha padroeira na qual recorri num momento crítico da graduação, e a minha família que me deu todo suporte possível em especial a minha esposa Sabrina de Souza que aturou bastantes meus sacrifícios. Não foi possível concluir sem esses conjuntos de aliados, sem todo esse apoio e dedicação as dificuldades seriam maiores, obrigado.

## APÊNDICE A

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

Eu, ....., R.G/CPF nº ....., concordo em participar voluntariamente da pesquisa intitulada “**A Contribuições da Geometria Hiperbólica na Formação de Professores de Matemática**”, que tem como pesquisador responsável Ítalo Jone Xavier Martins, estudante do Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade do Estado do Amazonas (UEA), orientada pelo prof. Dr. Júlio César Marinho da Fonseca, que podem ser contatados pelos e-mails [ijxm.mat18@uea.edu.br](mailto:ijxm.mat18@uea.edu.br), [jcmfonseca@uea.edu.br](mailto:jcmfonseca@uea.edu.br) e pelo telefone (92) 99447-3666.

A pesquisa tem por objetivo: Compreender quais as contribuições da Geometria Hiperbólica na Formação de Professores de Matemática?

Estou ciente que minha participação consistirá em participar de uma entrevista sobre a temática investigada. que será enviado via WhatsApp em um dia previamente combinado colaborando e contribuindo de forma consensual.

Compreendo que essa pesquisa possui finalidade de estudo acadêmico e que as informações por mim disponibilizadas poderão ser divulgadas seguindo as diretrizes éticas da pesquisa, assegurando, assim, minha privacidade.

Sei que posso retirar meu consentimento quando eu quiser, que minha participação não gera vínculo institucional com a Universidade do Estado do Amazonas e que não receberei nenhum pagamento por essa participação.

Parintins, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2025.

---

Assinatura do(a) participante

---

Assinatura do pesquisador

1817030038  
(92) 99447-3666

## APÊNDICE B

### ROTEIRO DA ENTREVISTA PARA UM PROFESSOR DO LABORATORIO DE INFORMATICA.

Você está sendo convidado a participar desse questionário que tem fins puramente acadêmico e seguirá os critérios éticos da pesquisa científica de modo que seus dados não serão divulgados e serão conhecidos apenas pelo pesquisador que fará uso dessas informações de maneira ética e sigilosa.

#### 1. Identificação (apenas para controle do pesquisador)

Nome: .....

Idade: .....

Atuação/Cargo: .....

Formação acadêmica: .....

#### 2. Questões da Entrevista.

2.2) Todos os acadêmicos têm acesso ao laboratório para fins de estudo?

2.1) Os computadores possuem o programa geogebra instalado? Qual versão?

2.3) O geogebra instalado possui as ferramentas de geometria hiperbólica?

2.4) Existido os recursos para o estudo, você acredita que necessita de mais ações para ensino dos softwares? Por quê?

Parintins, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2025.

## APÊNDICE C

### ROTEIRO DE ENTREVISTA COM A BIBLIOTECARIA.

Você está sendo convidado a participar desse questionário que tem fins puramente acadêmico e seguirá os critérios éticos da pesquisa científica de modo que seus dados não serão divulgados e serão conhecidos apenas pelo pesquisador que fará uso dessas informações de maneira ética e sigilosa.

#### 1. Identificação (apenas para controle do pesquisador)

Nome: .....

Idade: .....

Atuação/Cargo: .....

Formação acadêmica: .....

#### 2. Questões

2.1) Quem é o responsável por selecionar os livros do acervo de matemática?

2.2) Nós como acadêmicos do curso de matemática podemos fazer solicitações de livros que não há no acervo?

2.3) No acervo de livros de matemática há exemplares de geometria?

2.4) Quantos desses livros de geometria referisse a geometria hiperbólica?

Parintins, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2025.

APÊNDICE D  
**ROTEIRO DE ENTREVISTA COM OS ACADEMICOS DO CURSO DE  
MATEMÁTICA.**

Você está sendo convidado a participar desse questionário que tem fins puramente acadêmico e seguirá os critérios éticos da pesquisa científica de modo que seus dados não serão divulgados e serão conhecidos apenas pelo pesquisador que fará uso dessas informações de maneira ética e sigilosa.

**1. Identificação** (apenas para controle do pesquisador)

Nome: .....

Idade: .....

Período: .....

**2. Questões**

2.1) Você conhece as geometrias não euclidianas?

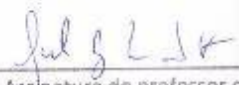
2.2) Em que momento do curso você conheceu? E como foi esse contato?

Parintins, \_\_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2025.

## TERMO DE ANUÊNCIA – ENTREGA DO PROJETO

Eu, professor, **Júlio César Marinho da Fonseca**, autorizo que o estudante, **Ítalo Jone Xavier Martins** entregue para avaliação o seu PROJETO DE PESQUISA intitulado: **A contribuição da geometria hiperbólica na formação dos professores de matemática** que foi elaborado sob minha orientação e seguiu as diretrizes dadas na disciplina de TCC II, ministrada pelo prof. Dr. Clodoaldo Pires Araújo.

Parintins, 02 de junho de 2025.

  
Assinatura do professor orientador.

  
Assinatura do estudante



Centro de Estudos Superiores de Parintins  
Estrada Odovaldo Novo, S/N - D'Jerde Vieira  
CEP: 69.125-470 / Parintins - AM

